Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2017

- **Mathematik 12 Technik - A II - Lösung**

Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist die reelle Funktion f mit $f(x) := \dfrac{6 \cdot e^{x}}{e^{2 \cdot x} + 1}$ mit der maximalen Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.

Teilaufgabe 1.1 **(5 BE)**
Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte von f für $|x| \rightarrow \infty$.
Geben Sie Art und Gleichung der Asymptote des Graphen von f an.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\overset{\overset{0}{\uparrow}}{6 \cdot e^{x}}}{\underset{\underset{0}{\downarrow}}{e^{2 \cdot x}} + 1} \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\overset{\overset{\infty}{\uparrow}}{6 \cdot e^{x}}}{\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{e^{2 \cdot x}} + 1} \overset{\text{L'Hosp.}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{6 \cdot e^{x}}{2 \cdot e^{2 \cdot x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{3}{\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{2 \cdot e^{x}}} \rightarrow 0$$

waagrechte Asymptote: $y = 0$

Teilaufgabe 1.2 **(4 BE)**
Untersuchen Sie den Graph von f auf Symmetrie zum Koordinatensystem.

$$f(-x) = \frac{6 \cdot e^{-x}}{e^{-2 \cdot x} + 1} \cdot \frac{e^{2 \cdot x}}{e^{2 \cdot x}} = \frac{6 \cdot e^{x}}{1 + e^{2 \cdot x}} = f(x) \quad \Rightarrow$$

Achsensymmetrie zur y-Achse

Teilaufgabe 1.3 (8 BE)
Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion f und ermitteln Sie damit Koordinaten und Art des Extrempunktes des Graphen von f.

[Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \left(6\cdot e^{x} - 6\cdot e^{3\cdot x}\right)\cdot\left(e^{2\cdot x} + 1\right)^{-2}$]

$$f'(x) = \frac{6\cdot e^{x}\cdot\left(e^{2\cdot x}+1\right) - 6\cdot e^{x}\cdot 2\cdot e^{2\cdot x}}{\left(e^{2\cdot x}+1\right)^{2}} = \frac{6\cdot e^{3\cdot x} + 6\cdot e^{x} - 12\cdot e^{3\cdot x}}{\left(e^{2\cdot x}+1\right)^{2}} = \frac{6\cdot e^{x} - 6\cdot e^{3\cdot x}}{\left(e^{2\cdot x}+1\right)^{2}}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6\cdot e^{x} - 6\cdot e^{3\cdot x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6\cdot e^{x}\cdot\left(1 - e^{2\cdot x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - e^{2\cdot x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2\cdot x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\cdot\ln(1) = 0$$

$y1 := -10 .. 10$

		x = 0	
Zähler	pos		neg
Nenner	pos		pos
f(x)	pos		neg
G_f	sms		smf

G_f ist streng mon. steigend in **] $-\infty$; 0]** und G_f ist streng mon. fallend in **[0 ; ∞ [**.

$f(0) = 3$

$\Rightarrow$ (Absoluter) Hochpunkt: **H (0 | 3)**

Teilaufgabe 1.4 (5 BE)

Zeigen Sie, dass der Ansatz $f''(x) = 0$ auf die Gleichung $e^{2 \cdot x} - 6 \cdot e^{2 \cdot x} + 1 = 0$ führt.

$$f''(x) = 6 \cdot \frac{\left(e^{x} - 3 \cdot e^{3 \cdot x}\right) \cdot \left(e^{2 \cdot x} + 1\right)^{2} - \left(e^{x} - e^{3 \cdot x}\right) \cdot 2 \cdot \left(e^{2 \cdot x} + 1\right) \cdot 2 \cdot e^{2 \cdot x}}{\left(e^{2 \cdot x} + 1\right)^{4}}$$

$$f''(x) = 6 \cdot \left(e^{2 \cdot x} + 1\right) \cdot \frac{\left(e^{x} - 3 \cdot e^{3 \cdot x}\right) \cdot \left(e^{2 \cdot x} + 1\right) - \left(e^{x} - e^{3 \cdot x}\right) \cdot 2 \cdot 2 \cdot e^{2 \cdot x}}{\left(e^{2 \cdot x} + 1\right)^{4}}$$

$$f''(x) = 6 \cdot \frac{e^{3 \cdot x} + e^{x} - 3 \cdot e^{5 \cdot x} - 3 \cdot e^{3 \cdot x} - 4 \cdot e^{3 \cdot x} + 4 \cdot e^{5 \cdot x}}{\left(e^{2 \cdot x} + 1\right)^{3}}$$

$$f''(x) = 6 \cdot \frac{e^{5 \cdot x} - 6 \cdot e^{3 \cdot x} + e^{x}}{\left(e^{2 \cdot x} + 1\right)^{3}} = 6 \cdot e^{x} \cdot \frac{e^{4 \cdot x} - 6 \cdot e^{2 \cdot x} + 1}{\left(e^{2 \cdot x} + 1\right)^{3}}$$

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{4 \cdot x} - 6 \cdot e^{2 \cdot x} + 1 = 0$$

Teilaufgabe 1.5 (6 BE)

Der Graph von f besitzt im 1. Quadranten genau einen Wendepunkt W_1.

Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes auf zwei Nachkommastellen gerundet.

Subst.: $e^{2 \cdot x} = z$

$$\Leftrightarrow \quad z^{2} - 6 \cdot z + 1 = 0 \text{ auflösen}, z \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \cdot \sqrt{2} + 3 \\ 3 - 2 \cdot \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Resubst: $e^{2 \cdot x} = 2 \cdot \sqrt{2} + 3$ $\quad x_1 := \frac{1}{2} \cdot \ln\left(2 \cdot \sqrt{2} + 3\right)$ $\quad x_1 = 0.88$

$e^{2 \cdot x} = 3 - 2 \cdot \sqrt{2}$ $\quad x_2 := \frac{1}{2} \cdot \ln\left(3 - 2 \cdot \sqrt{2}\right)$ $\quad x_2 = -0.88$ keine Lösung

$f(0.88) = 2.123$

Wendepunkt: **W_1 (0,88 | 2,12)**

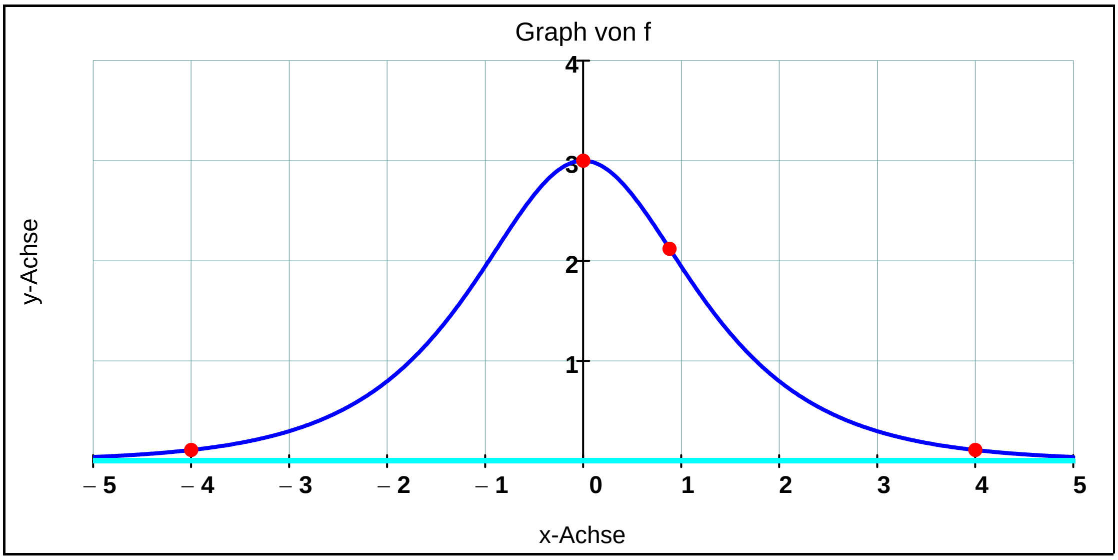
Teilaufgabe 1.6 **(5 BE)**
Zeichnen Sie unter der Verwendung der bisherigen Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen von f sowie mit Farbe seine Asymptote für $-4 \le x \le 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem.
Maßstab: **1 LE = 1cm** .

$x_d =$

-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

$f(x_d) =$

0.1
0.3
0.8
1.9
3
1.9
0.8
0.3
0.1



Teilaufgabe 1.7.0

Gegeben sind zudem die reellen Funktionen h mit $h(x) = \frac{2 \cdot e^{2 \cdot x}}{e^{2 \cdot x} + 1}$ und H mit $H(x) = \ln\left(e^{a \cdot x} + b\right)$

mit den Definitionsmengen $D_h = D_H = IR$ und $a, b \in IR$.

Teilaufgabe 1.7.1 (6 BE)

Die Koeffizienten a und b sind dadurch festgelegt, dass der Graph von H die y-Achse im Punkt $T\,(0 \mid \ln(2))$ schneidet und die Tangente an den Graphen von H im Punkt T parallel zur Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten verläuft.
Berechnen Sie mithilfe dieser Angaben die Koeffizienten a und b.
Zeigen Sie danach. dass die Funktion H eine Stammfunktion der Funktion h in D_H ist.
[Teilergebnis: $a = 2$; $b = 1$]

$$H(0) = \ln(2) \quad \Rightarrow \quad \ln\left(e^0 + b\right) = \ln(2) \quad \Rightarrow \quad 1 + b = 2 \quad \Rightarrow \quad b = 1$$

$$H'(x) = \frac{a \cdot e^{a \cdot x}}{e^{a \cdot x} + b}$$

$$H'(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad H'(0) = \frac{a \cdot e^0}{e^0 + b} \overset{b = 1}{=} \frac{a}{b + 1} = \frac{a}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 2$$

$$H(x) = \ln\left(e^{2 \cdot x} + 1\right) \qquad H'(x) = \frac{2 \cdot e^{2 \cdot x}}{e^{2 \cdot x+1}} = h(x)$$

Teilaufgabe 1.7.2 (9 BE)

Der Graph von h und die x-Achse schließen mit den senkrechten Geraden mit den Gleichungen $x = x_S$ und $x = u$ mit $u \in IR$ und $u > x_S$ im 1. Quadranten ein Flächenstück ein Flächenstück ein.
Dabei ist x_S die Schnittstelle der Graphen von f und h.

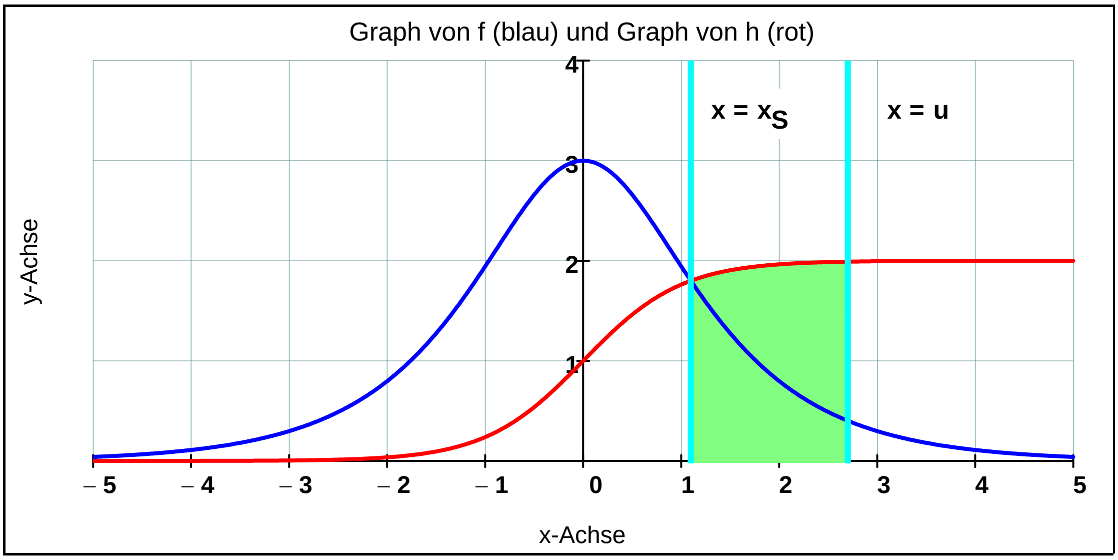
Zeigen Sie, dass für die Maßzahl $A(u)$ des Flächeninhalts gilt: $A(u) = \ln\left(\frac{e^{2 \cdot u} + 1}{10}\right)$.

Bestimmen Sie anschließend den Wert von u so, dass die Flächenmaßzahl $A(u)$ den Wert $\ln(5)$ annimmt.

$$h(x) := \frac{2 \cdot e^{2 \cdot x}}{e^{2 \cdot x} + 1}$$

Schnittstelle: $\quad f(x) = h(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{6 \cdot e^x}{e^{2 \cdot x} + 1} = \frac{2 \cdot e^{2 \cdot x}}{e^{2 \cdot x} + 1} \quad \Leftrightarrow \quad 6 \cdot e^x = 2 \cdot e^{2 \cdot x}$

$$\Leftrightarrow \quad e^x = 3 \quad \Rightarrow \quad x_S = \ln(3)$$



$$A(u) = \int_{\ln(3)}^{u} h(x)\,dx = H(u) - H(\ln(3)) = \ln\left(e^{2\cdot u} + 1\right) - \ln\left(e^{2\cdot \ln(3)} + 1\right)$$

$$A(u) = \ln\left(\frac{e^{2\cdot u} + 1}{3^2 + 1}\right) = \ln\left(\frac{e^{2\cdot u} + 1}{10}\right)$$

Bedingung: $\ln\left(\frac{e^{2\cdot u} + 1}{10}\right) = \ln(5) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e^{2\cdot u} + 1}{10} = 5$

$\Leftrightarrow \quad e^{2\cdot u} = 49 \quad \Leftrightarrow \quad e^{u} = 7 \quad\quad u = \ln(7)$

Teilaufgabe 2.0
Unter der Tageslänge versteht man die Dauer von Sonnenaufgang bis Sonnenuntergang. Sie ist von der geographischen Breite des Ortes abhängig. Es wurden die Tageslängen in München im Jahr 2016 (Schaltjahr mit 366 Tagen) aufgezeichnet. Die maximale Tageslänge betrug 16,12 h, die minimale Tageslänge 8,40 h. Die Tageslänge am 1.1.2016 (0. Tag) betrug 8,46 h (Wert geringfügig verändert). Die Funktion g mit $g(t) = a\cdot\sin(b\cdot t + c) + d$ mit $a, b, c, t \in IR$ und $t \in [\,0\,;\,366\,]$ wird nun modellhaft zur Darstellung der Aufzeichnungen verwendet. t beschreibt dabei die Anzahl der vergangenen Tage ab Beginn des 1.1.2016 und der Funktionswert g(t) die Länge des dazugehörigen Tages in Stunden. Da sich die jeweilige Tageslänge immer auf ganze Tage bezieht, sollen Werte für t auf ganze Zahlen gerundet werden.
Auf das Mitführen von Einheiten wird verzichtet.

Teilaufgabe 2.1 (5 BE)
Bestimmen Sie mögliche Werte der Parameter a, b , d exakt und c sinnvoll gerundet so, dass die Funktion g die obigen Bedingungen erfüllt.

$g(t) = a\cdot\sin(b\cdot t + c) + d$

Amplitude: $a = \frac{1}{2}\cdot(16.12 - 8.4) = 3.86$

Verschiebung nach oben: $d = 8.4 + 3.86 = 12.26$

Periodendauer: $b = \frac{2\cdot\pi}{366} = \frac{\pi}{183}$

$g(0) = 8.46$ $\quad a\cdot\sin(b\cdot 0 + c) + d = 8.46$

a, d und b einsetzen: $3.86\cdot\sin(c) + 12.26 = 8.46$

$c := \operatorname{asin}\left(\frac{8.46 - 12.26}{3.86}\right) \qquad c = -1.394$

Konkreter Funktionsterm: $g(t) := 3.86\cdot\sin\left(\frac{\pi}{183}\cdot t - 1.39\right) + 12.26$

Hinweis
Die folgenden Teilaufgaben 2.2 bis 2.4 sind unter Verwendung der folgenden Funktion g zu bearbeiten: $g(t) = 3.86\cdot\sin(0.01717\cdot t - 1.39) + 12.26$ mit $t \in [\,0\,;\,366\,[$

Teilaufgabe 2.2 (5 BE)
Berechnen Sie für 2016 die Tage, an denen die Tageslänge in München 12 h betrug.

$g(t) = 12 \quad \Leftrightarrow \quad 3.86\cdot\sin(0.01717\cdot t - 1.39) + 12.26 = 12$

$\Leftrightarrow \quad \sin(0.01717\cdot t - 1.39) = -0.06736$

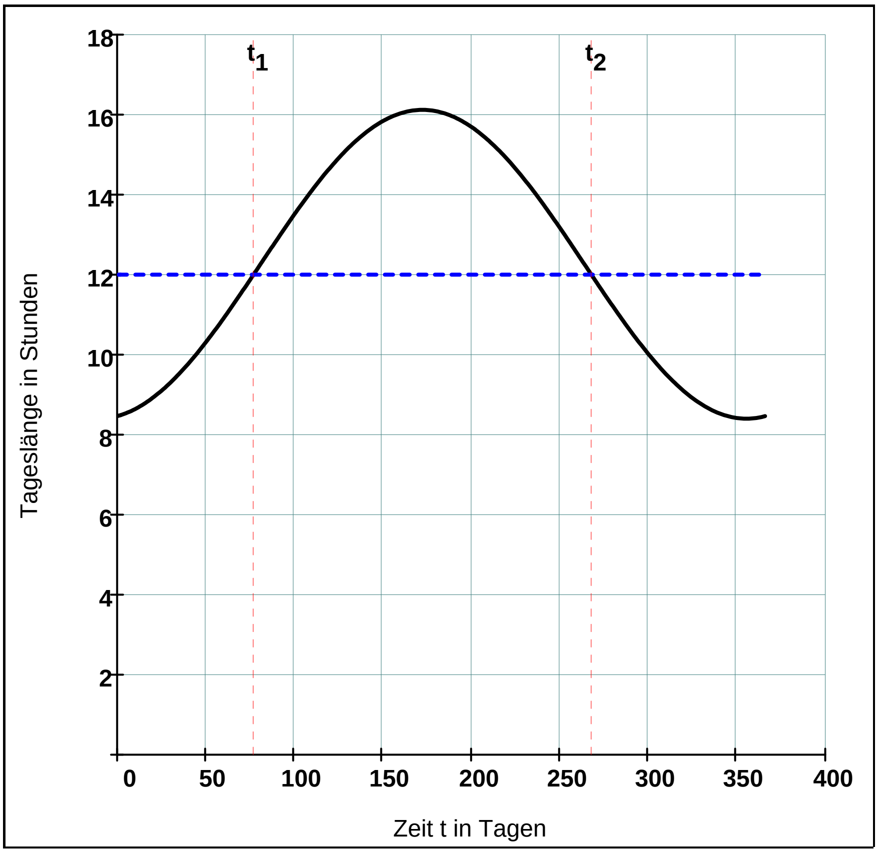
$$0.01717 \cdot t - 1.39 = \operatorname{asin}(-0.06736)$$ NR: $\operatorname{asin}(-0.06736) = -0.06741$

1. Lösung: $0.01717 \cdot t - 1.39 = -0.06741$

$$t_1 := \frac{-0.06741 + 1.39}{0.01717} \qquad t_1 = 77$$

2. Lösung: $0.01717 \cdot t - 1.39 = \pi - (-0.06741)$

$$t_2 := \frac{\pi - (-0.06741) + 1.39}{0.01717} \qquad t_2 = 268$$



Teilaufgabe 2.3 **(7 BE)**
Berechnen Sie den kürzesten Tag des Jahres 2016 in München.

$g'(t) := 3.86 \cdot 0.01717 \cdot \cos(0.01717 \cdot t - 1.39)$

$g'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(0.01717 \cdot t - 1.39) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0.01717 \cdot t - 1.39 = \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow \quad t_1 := \dfrac{\frac{\pi}{2} + 1.39}{0.01717} = 172.44 \qquad t_1 = 172$

$t_2 := t_1 + \dfrac{366}{2} = 355.44 \qquad t_2 = 355$

Funktionswerte: $g(172) = 16.12$

$g(355) = 8.40012$

Vergleich mit dem Randpunkten: $g(356) = 8.40016$

$g(0) = 8.463$

Der absolut kürzeste Tag ist der Tag 355.

2. Möglichkeit:

$g''(t) = -3.86 \cdot 0.01717^2 \cdot \sin(0.01717 \cdot t - 1.39)$

$g''(172) = -3.86 \cdot 0.01717^2 \cdot \sin(0.01717 \cdot 172 - 1.39) = -0.0011 \quad \Rightarrow$ rel. Maximum

$g''(355) = -3.86 \cdot 0.01717^2 \cdot \sin(0.01717 \cdot 355 - 1.39) = 0.0011 \quad \Rightarrow$ rel. Minimum

Teilaufgabe 2.4 **(5 BE)**
Berechnen Sie für München den prozentualen Anteil der Tageslicht-Stunden an den Stunden der ersten 100 Tage des Jahres 2016.

Gesamtstunden der ersten 100 Tage: $100 \cdot 24 = 2400$

Stammfunktion:

$$G(t) = \int (3.86 \cdot \sin(0.01717 \cdot t - 1.39) + 12.26)\, dt = \frac{-3.86}{0.01717} \cdot \cos(0.01717 \cdot t - 1.39) + 12.26 \cdot t$$

Tageslichtstunden der ersten 100 Tage:

$$\int_0^{100} g(t)\, dt = \int_0^{100} \left(\frac{3.86}{0.01717} \cdot \sin(0.01717 \cdot t - 1.39) + 12.26 \right) dt$$

$$\frac{-3.86}{0.01717} \cdot \cos(0.01717 \cdot 100 - 1.39) + 12.26 \cdot 100 - \left(\frac{-3.86}{0.01717} \cdot \cos(0.01717 \cdot 0 - 1.39) \right) = 1053.526$$

Prozentualer Anteil: $\frac{1053.526}{2400} = 43.9 \cdot \%$