Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2017

- **Mathematik 12 Technik - B I - Lösung mit CAS**

Teilaufgabe 1.0

Im IR^3 sind folgende Vektoren gegeben:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{c_p} = \begin{pmatrix} p+4 \\ 2\cdot p \\ 3-4\cdot p \end{pmatrix} \text{ mit } p \in IR \text{ und } \vec{d} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Bestimmen Sie den Wert des Parameters p, für den die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c_p}$ eine Basis des IR^3 bilden. Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{c_p}$ für keinen Wert von p parallel zum Vektor $\vec{d}$ sein kann.

$$a := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad c(p) := \begin{pmatrix} p+4 \\ 2\cdot p \\ 3-4\cdot p \end{pmatrix} \qquad d := \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Überprüfung der linearen Unabhängigkeit:

CAS

$$(a \times b)\cdot c(p) = 0 \to 8\cdot \bar{p} - 8 = 0 \text{ auflösen}, p \;\to 1$$

Linear abhängig für $p = 1$.

Die Vektoren sind für $p \neq 1$ linear unabhängig und bilden also eine Basis.

Vektoren parallel: $\vec{c_p} = \lambda\cdot\vec{d}$

$$\begin{pmatrix} p+4 \\ 2\cdot p \\ 3-4\cdot p \end{pmatrix} = \lambda\cdot\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

2. Zeile: $\lambda = p \quad \Rightarrow$

1. Zeile: $\lambda + 4 = -5\cdot\lambda \text{ auflösen}, \lambda \;\to -\frac{2}{3}$

3. Zeile: $3 - 4\cdot\lambda = -3\cdot\lambda \text{ auflösen}, \lambda \;\to 3$

Widerspruch, die Vektoren sind nie parallel.

Teilaufgabe 1.2 (3 BE)

Drücken Sie den Vektor $\vec{d}$ durch eine Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c_{-2}}$ (d. h. für $p = -2$) aus.

CAS

$$\lambda_1\cdot a + \lambda_2\cdot b + \lambda_3\cdot c(-2) = d \text{ auflösen}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \;\to \begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 3 \qquad \lambda_2 = \frac{-5}{2} \qquad \lambda_3 = 1$$

Teilaufgabe 2.0

Im IR^3 sind die Geraden g_q und **h** gegeben:

$$g_q:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ q \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot q - 1 \\ 2 \cdot q \\ q + 1 \end{pmatrix} \text{ mit } q, \lambda \in IR; \quad h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ mit } \mu \in IR.$$

Teilaufgabe 2.1 **(10 BE)**

Untersuchen Sie **ohne CAS** die gegenseitige Lage der zwei Geraden g_q und h in Abhängigkeit von q.

Richtungsvektoren parallel?

$$\begin{pmatrix} 3 \cdot q - 1 \\ 2 \cdot q \\ q + 1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Zeile: $\quad 2 \cdot q = 0 \quad \Rightarrow \quad q = 0$

1. Zeile: $\quad -1 = \lambda \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1$

3. Zeile: $\quad 1 = -\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1 \quad \Rightarrow$ Vektoren parallel für $q = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ q \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Zeile: $\quad 2 = 1$ Widerspruch $\quad \Rightarrow$ Geraden sind echt parallel für $q = 0$.

Geraden schneiden sich?

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ q \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot q - 1 \\ 2 \cdot q \\ q + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \mu & \lambda \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 - 3 \cdot q & -1 \\ 0 & -2 \cdot q & -1 \\ -1 & -q - 1 & q \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} + \text{I}]{\text{II} \cdot (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 - 3 \cdot q & -1 \\ 0 & 2 \cdot q & 1 \\ 0 & -4 \cdot q & q - 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} + \text{I}]{\text{II} \cdot (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 - 3 \cdot q & -1 \\ 0 & 2 \cdot q & 1 \\ 0 & 0 & q + 1 \end{pmatrix}$$

richtig für $\quad q + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad q = -1 \quad \Rightarrow$ Die Geraden schneiden sich.

Für $q \in IR \setminus \{0, -1\}$ sind die Geraden windschief.

Teilaufgabe 2.2.0
Setzen Sie nun $q = -1$

Teilaufgabe 2.2.1 (3 BE)
Ermitteln Sie den Schnittwinkel der Geraden g_{-1} und h auf eine Nachkommastelle gerundet.

$$u_g := \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_h := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha := \operatorname{acos}\left(\frac{|u_g \cdot u_h|}{|u_g| \cdot |u_h|}\right) \qquad \alpha = 50.8 \cdot °$$

Teilaufgabe 2.2.2 (3 BE)
Die Geraden g_{-1} und h legen eine Ebene E fest. Bestimmen Sie je eine Gleichung der Ebene E in Parameterform und in Normalenform.

Parameterform von E:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mu, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Normalenvektor:

$$n_E := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Normalenform von E:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = 0$$

Teilaufgabe 3 (6 BE)
Die Kirchturmspitze eines Dorfes sei der Punkt **K(−2 | 9 | 32)**.
Ein neugieriger Mensch steuert in dem Dorf eine Drohne entlang einer Geraden durch den Punkt **P(2 | 0 | 1,5)** in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.
Bei der Betrachtung wird ein kartesisches Koordinatensystem zugrunde gelegt, wobei der Erdboden sich in der x_1-x_2-Ebene befindet.
Die Koordinaten sind alle in Metern angegeben, auf das Mitführen der Einheit Meter kann bei den Berechnungen verzichtet werden.
Berechnen Sie die kürzeste Entfernung der Drohne von der Kirchturmspitze sowie die Höhe über dem Erdboden, in der sie sich dabei befindet.

Flugbahn der Drohne entspricht Gerade g:

$$x_g(\sigma) := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Ortsvektor zur Kirchturmspitze:

$$OK := \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 32 \end{pmatrix}$$

Allgemeiner Geradenpunkt:

$$OX(\sigma) := \begin{pmatrix} 2 - \sigma \\ 2 \cdot \sigma \\ 6 \cdot \sigma + \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Verbindungsvektor $\overrightarrow{KX}$

$$KX(\sigma) := OX(\sigma) - OK \rightarrow \begin{pmatrix} 4 - \sigma \\ 2 \cdot \sigma - 9 \\ 6 \cdot \sigma - \frac{61}{2} \end{pmatrix}$$

KX senkrecht zu g und damit zu **v**:

$$\sigma_0 := \begin{pmatrix} 4 - \sigma \\ 2 \cdot \sigma - 9 \\ 6 \cdot \sigma - \frac{61}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow 41 \cdot \sigma - 205 = 0 \text{ auflösen}, \sigma \rightarrow 5 \qquad \sigma_0 = 5$$

$\sigma = 5$ in allgemeinen Geradenpunkt einsetzen liefert Lotfußpunkt

$$OL := x_g(\sigma_0) \rightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ \frac{63}{2} \end{pmatrix}$$

Lotfußpunkt: $L := OL^T \qquad L \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 10 & \frac{63}{2} \end{pmatrix}$

Verbindungsvektor KL:

$$KL := OL - OK \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Kürzeste Entfernung:

$$d := |KL| \qquad d = 1.5$$

Höhe über dem Erdboden: $h := L_{1,3} \cdot m \qquad h = 31.5\,m$