Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2017

- **Mathematik 12 Technik - B I - Lösung**

Teilaufgabe 1.0

Im IR^3 sind folgende Vektoren gegeben:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c_p} = \begin{pmatrix} p+4 \\ 2 \cdot p \\ 3 - 4 \cdot p \end{pmatrix} \text{ mit } p \in IR \text{ und } \vec{d} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe 1.1 (4 BE)

Bestimmen Sie den Wert des Parameters p, für den die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c_p}$ eine Basis des IR^3 bilden.

Überprüfung der linearen Unabhängigkeit über das Spatpodukt:

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c_p} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} p+4 \\ 2 \cdot p \\ 3 - 4 \cdot p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -14 \\ -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p+4 \\ 2 \cdot p \\ 3 - 4 \cdot p \end{pmatrix} = 8 \cdot p - 8$$

Linear abhängig: $8 \cdot p - 8 = 0$ **auflösen**, $p \rightarrow 1$

Die Vektoren sind für $p \neq 1$ linear unabhängig und bilden also eine Basis des IR^3.

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)

Drücken Sie den Vektor $\vec{d}$ durch eine Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c_{-2}}$ (d. h. für $p = -2$) aus.

$$\lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{b} + \lambda_3 \cdot \vec{c_{-2}} = \vec{d}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & 11 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} + 3 \cdot \text{I}]{\text{II} - 2 \cdot \text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -5 \\ 0 & -8 & -8 & 12 \\ 0 & 14 & 17 & -18 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{\text{II}}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 14 & 17 & -18 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{III} + 7 \cdot \text{II}]{} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot \lambda_3 = 3 \quad \Rightarrow \quad \lambda_3 = 1$$

$$-2 \cdot \lambda_2 - 2 = 3 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = \frac{-5}{2}$$

$$\lambda_1 + 4 \cdot \left(\frac{-5}{2}\right) + 2 = -5 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 3$$

Teilaufgabe 2.0

Im IR^3 sind die Geraden $\mathbf{g_q}$ und $\mathbf{h}$ gegeben:

$$g_q:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ q \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot q - 1 \\ 2 \cdot q \\ q + 1 \end{pmatrix} \text{ mit } q,\ \lambda \in IR; \quad h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ mit } \mu \in IR.$$

Teilaufgabe 2.1 (10 BE)

Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der zwei Geraden g_q und h in Abhängigkeit von q.

Richtungsvektoren parallel?

$$\begin{pmatrix} 3 \cdot q - 1 \\ 2 \cdot q \\ q + 1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Zeile: $\quad 2 \cdot q = 0 \quad \Rightarrow \quad q = 0$

1. Zeile: $\quad -1 = \lambda \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1$

3. Zeile: $\quad 1 = -\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1 \quad \Rightarrow$ Vektoren parallel für $\mathbf{q = 0}$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ q \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Zeile: $\quad 2 = 1$ Widerspruch $\quad \Rightarrow$ Geraden sind echt parallel für $\mathbf{q = 0}$.

Geraden schneiden sich?

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ q \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot q - 1 \\ 2 \cdot q \\ q + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \mu & \lambda & \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 - 3 \cdot q & -1 \\ 0 & -2 \cdot q & -1 \\ -1 & -q - 1 & q \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} + \text{I}]{\text{II} \cdot (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 - 3 \cdot q & -1 \\ 0 & 2 \cdot q & 1 \\ 0 & -4 \cdot q & q - 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} + \text{I}]{\text{II} \cdot (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 - 3 \cdot q & -1 \\ 0 & 2 \cdot q & 1 \\ 0 & 0 & q + 1 \end{pmatrix}$$

richtig für $\quad q + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad q = -1 \quad \Rightarrow \quad$ Die Geraden schneiden sich.

Für $\mathbf{q} \in \mathbf{IR \setminus \{ 0 , -1\}}$ sind die Geraden windschief.

Teilaufgabe 2.2.0
Setzen Sie nun $\mathbf{q = -1}$

Teilaufgabe 2.2.1 (4 BE)
Ermitteln Sie den Schnittwinkel der Geraden $\mathbf{g_{-1}}$ und h auf eine Nachkommastelle gerundet.

Existenz eines Schnittpunktes bekannt aus 2.1

$$\vec{u_g} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{u_h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\vec{u_g} \cdot \vec{u_h}\right|}{\left|\vec{u_g}\right| \cdot \left|\vec{u_h}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|-4|}{\sqrt{16+4} \cdot \sqrt{1+1}} = \frac{4}{\sqrt{40}} = 0.632$$

$$\alpha := \operatorname{acos}\left(\frac{4}{\sqrt{40}}\right) \qquad \alpha = 50.8 \cdot {}^\circ$$

Teilaufgabe 2.2.2 (3 BE)
Die Geraden $\mathbf{g_{-1}}$ und **h** legen eine Ebene E fest. Bestimmen Sie je eine Gleichung der Ebene **E** in Parameterform und in Normalenform.

Parameterform von E:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mu, \lambda \in \mathrm{IR}.$$

Normalenvektor:

$$\vec{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Normalenform von E:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = 0$$

Teilaufgabe 3 **(5 BE)**
Die Kirchturmspitze eines Dorfes sei der Punkt **K(−2 | 9 | 32)**.
Ein neugieriger Mensch steuert in dem Dorf eine Drohne entlang einer Geraden durch den Punkt **P(2 | 0 | 1,5)** in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.
Bei der Betrachtung wird ein kartesisches Koordinatensystem zugrunde gelegt.
Die Koordinaten sind alle in Metern angegeben, auf das Mitführen der Einheit Meter kann bei den Berechnungen verzichtet werden.
Berechnen Sie die kürzeste Entfernung der Drohne von der Kirchturmspitze.

Flugbahn der Drohne entspricht Gerade g:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1.5 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Ortsvektor zur Kirchturmspitze:

$$\overrightarrow{OK} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 32 \end{pmatrix}$$

Allgemeiner Geradenpunkt:

$$\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 2 - \sigma \\ 2 \cdot \sigma \\ 6 \cdot \sigma + 1.5 \end{pmatrix}$$

Verbindungsvektor $\overrightarrow{KX}$:

$$\overrightarrow{KX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OK} = \begin{pmatrix} 2 - \sigma \\ 2 \cdot \sigma \\ 6 \cdot \sigma + 1.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - \sigma \\ 2 \cdot \sigma - 9 \\ 6 \cdot \sigma - 30.5 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{KX}$ senkrecht zu g und damit zu $\vec{v}$:

$$\begin{pmatrix} 4 - \sigma \\ 2 \cdot \sigma - 9 \\ 6 \cdot \sigma - 30.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow 41 \cdot \sigma - 205.0 = 0 \text{ auflösen}, \sigma \rightarrow 5.0$$

$\sigma = 5$ in allgemeinen Geradenpunkt einsetzen liefert Lotfußpunkt L

$$\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 2 - 5 \\ 2 \cdot 5 \\ 6 \cdot 5 + 1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 31.5 \end{pmatrix}$$

Kürzeste Entfernung:

$$\left|\overrightarrow{KL}\right| = \left|\overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OK}\right| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 31.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 32 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -0.5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-0.5)^2} = 1.5$$

Die kürzeste Entfernung beträgt 1,5 m.