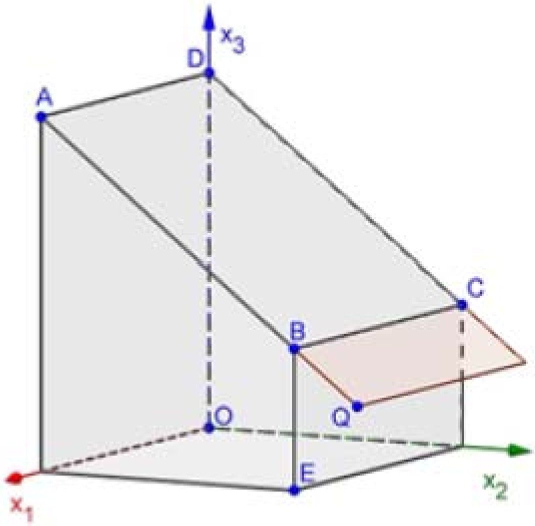
Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2017

- **Mathematik 12 Technik - B II - Lösung mit CAS**

Teilaufgabe 1.0
Die Abbildung zeigt einen Wintergarten, dessen Boden in der x_1-x_2-Ebene eines kartesischen Koorindatensystems liegt.
Das rechteckige Glasdach ABCD ist von einer Markise bedeckt. Dabei wird der Abstand zwischen Glasdach und Markise vernachlässigt.

Die Ebene, in der die Markise liegt, wird mit M bezeichnet. Folgende Punkte des Wintergartens sind gegeben:
A(5 | 0 | 5), **B(5 | 4 | 2)**, **D(0 | 0 | 5)** und **E(5 | 4 | 0)**.
Alle Koordinaten sind in Metern angegeben.
Auf das Mitführen der Einheiten bei den Berechnungen kann verzichtet werden.



Gegeben:

$$OA := \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad OB := \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad OD := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad OE := \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe 1.1 (4 BE)
Die Markise lässt sich in Verlängerung des Glasdaches über die untere Dachkante **[BC]** um 1,25 m bis zum Punkt **Q** (siehe Skizze) ausfahren.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes **Q**. [Ergebnis: **Q(5 | 5 | 1,25)**]

$$OA = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad OB = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$AB := OB - OA = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad |AB| = 5 \qquad BQ := \frac{1}{5} \cdot AB \cdot 1.25 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0.75 \end{pmatrix}$$

$$OQ := OB + BQ = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1.25 \end{pmatrix} \qquad Q := OQ^T \qquad Q \rightarrow (5 \quad 5 \quad 1.25)$$

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)
Geben Sie eine Gleichung der Ebene **M** in Parameterform an und formen Sie diese in eine Koordinatenform um.
[Mögliches Teilergebnis: **M:** $3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 - 20 = 0$]

Ebene M geht durch die Punkte A, B und D:

Parameterform:

E: $$x_E(\lambda, \mu) := OA + \lambda \cdot (OD - OA) + \mu \cdot (OB - OA) = \begin{pmatrix} 5 - 5 \cdot \lambda \\ 4 \cdot \mu \\ 5 - 3 \cdot \mu \end{pmatrix}$$

$$n_M := (OD - OA) \times (OB - OA) = \begin{pmatrix} 0 \\ -15 \\ -20 \end{pmatrix} \qquad n_{M2} := \frac{-1}{5} \cdot n_M = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Koordinatenform: $$\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - OA\right] \cdot n_{M2} = 0 \rightarrow 3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 - 20 = 0$$

Teilaufgabe 1.3 (4 BE)
Berechnen Sie das Volumen des Wintergartens in m^3.

Seitenfläche Trapez: $$A = m \cdot h_1 = \frac{5 + 2}{2} \cdot 4 = 14$$

Volumen des Prismas: $$V = A \cdot h_2 = 14 \cdot 5 = 70$$

Das Volumen beträgt 70 m^3.

Teilaufgabe 1.4 (6 BE)
Mithilfe zweier Drahtseile, die an den schrägen Dachstreben **[AB]** und **[DC]** befestigt werden, soll eine Leuchte im Wintergarten im Punkt **U(2,4 | 1,5 | 2,8)** aufgehängt werden.
Ermitteln Sie die Mindestlänge des Drahtseils, das an der Strebe befestigt wird, welche weiter von **U** entfernt ist.
Runden Sie das Ergebnis auf cm.

Aufgrund der Koordinatenwerte ist AB die weiter entfernte Strebe.

Strebe AB: $$x_{AB}(\sigma) := OA + \sigma \cdot (OB - OA) \qquad x_{AB}(\sigma) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \cdot \sigma \\ 5 - 3 \cdot \sigma \end{pmatrix}$$

Allgemeiner Geradenpunkt: $\mathbf{OX}(\sigma) := \begin{pmatrix} 5 \\ 4\cdot\sigma \\ 5-3\cdot\sigma \end{pmatrix}$

Lotfußpunkt: Verbindungsstrecke allgemeiner Geradenpunkt zu U steht senkrecht zur Strebe AB:

$$\mathbf{OU} := \begin{pmatrix} \frac{24}{10} \\ \frac{15}{10} \\ \frac{28}{10} \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{OX}(\sigma) - \mathbf{OU})\cdot(\mathbf{OB} - \mathbf{OA}) = 0 \rightarrow 25\cdot\sigma - \frac{63}{5} = 0$$

$$\sigma_0 := 25\cdot\sigma - \frac{63}{5} = 0 \text{ auflösen}, \sigma \rightarrow \frac{63}{125}$$

Lotfußpunkt: $\mathbf{OL} := \mathbf{OX}(\sigma_0) = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{252}{125} \\ \frac{436}{125} \end{pmatrix}$

Verbindungsvektor: $\mathbf{UL} := \mathbf{OL} - \mathbf{OU} = \begin{pmatrix} \frac{13}{5} \\ \frac{129}{250} \\ \frac{86}{125} \end{pmatrix}$

Abstand = Länge des Verbindungsvektors: $|\mathbf{UL}| = 2.74$ in m

Teilaufgabe 1.5.0
Damit sich der Wintergarten bei Sonnenschein nicht zu stark aufheizt, ist die Markise jetzt bis zum Punkt **Q** ausgefahren.

Die Richtung der einfallenden Sonnenstrahlen wird durch den Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.8 \\ -1.4 \end{pmatrix}$ beschrieben.

Teilaufgabe 1.5.1 (4 BE)
Ohne Markise verliefe der Sonnenstrahl **s** durch den Punkt **E**. Geben Sie eine Gleichung für die Gerade **s** an und beechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts **T** von **s** mit der Markisenebene **M**.
[Ergebnis: **T(4 | 4,8 | 1,4)**

Richtungsvektor:

$$w := \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{8}{10} \\ -\frac{14}{10} \end{pmatrix}$$

Gerade s der Sonnenstrahlen:

$$x_s(\tau) := OE + \tau \cdot w = \begin{pmatrix} \tau + 5 \\ 4 - \frac{4 \cdot \tau}{5} \\ -\frac{7 \cdot \tau}{5} \end{pmatrix}$$

M: $3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 - 20 = 0$

s $\cap$ M: $\tau_0 := 3 \cdot \left(4 - \frac{4 \cdot \tau}{5}\right) + 4 \cdot \left(-\frac{7 \cdot \tau}{5}\right) - 20 = 0 \rightarrow -8 \cdot \tau - 8 = 0 \text{ auflösen}, \tau \rightarrow -1$

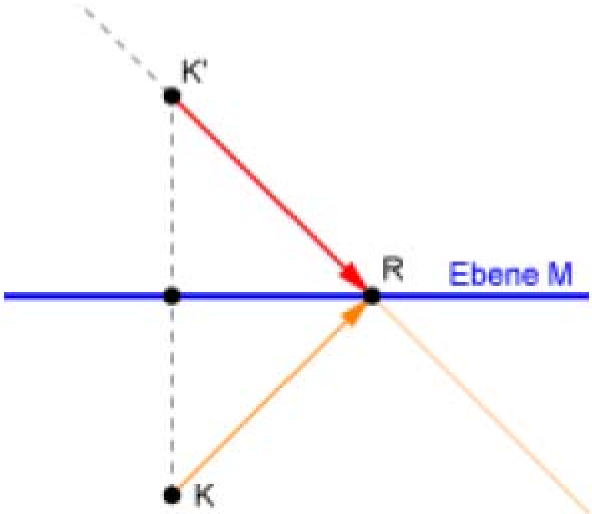
$$OT := x_s(\tau_0) \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{24}{5} \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4.8 \\ 1.4 \end{pmatrix} \qquad T := OT^T \rightarrow (4 \quad 4.8 \quad 1.4)$$

Teilaufgabe 1.5.2 (2 BE)
Erläutern Sie ohne Rechnung, ob der Punkt E bei diesem Sonnenstand im Schatten der ausgefahrenen Markise liegt.

$T := OT^T \rightarrow (4 \quad 4.8 \quad 1.4)$ zum Vergleich: $Q \rightarrow (5 \quad 5 \quad 1.25)$

Die x_1- und x_2-Koordinaten von T sind beide positiv und kleiner als die x_1- und x_2-Koordinaten von Q.
T als Schnittpunkt liegt auf der Markise, damit liegt E im Schatten.

Teilaufgabe 1.6 (6 BE)
Im Punkt **K(2 | 0 | 0)** befindet sich eine Lichtquelle. Ihr Strahl wird am Glasdach des Wintergartens im Punkt **R(1 | 2 | 3,5)** reflektiert. Ermitteln Sie durch geeignete Spiegelung eine Gleichung der Geraden, die den reflektierten Lichtstrahl beschreibt.



Gegeben:

$$\mathbf{OK} := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{OR} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

Hilfsgerade h durch K senkrecht zu M:

$$x_h(\rho) := \mathbf{OK} + \rho \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \cdot \rho \\ 4 \cdot \rho \end{pmatrix}$$

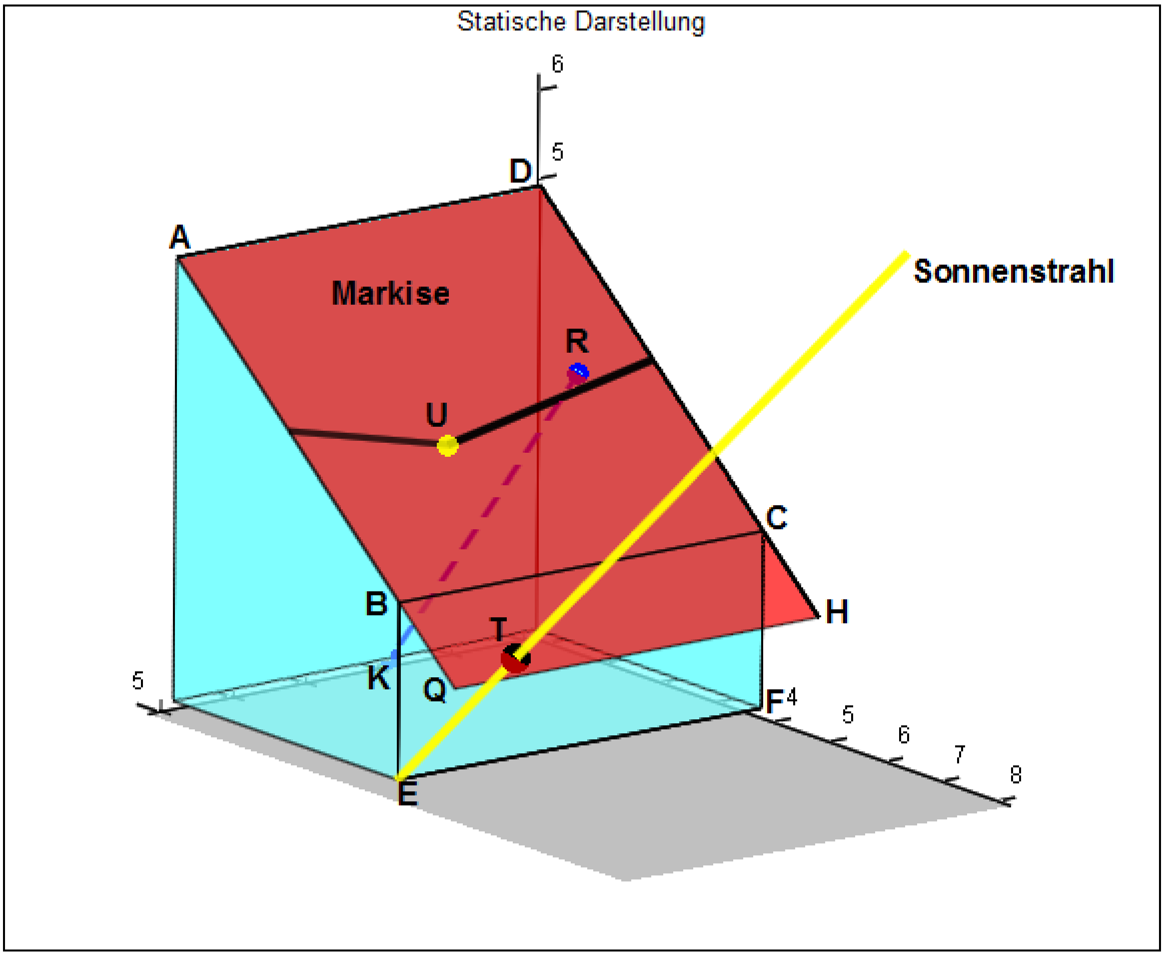
h $\cap$ M: $\rho_0 := 3 \cdot (3 \cdot \rho) + 4 \cdot (4 \cdot \rho) - 20 = 0 \rightarrow 25 \cdot \rho - 20 = 0$ **auflösen**, $\rho \rightarrow \frac{4}{5}$

Spiegelpunkt: $\mathbf{OK'} := x_h(\rho_0 \cdot 2) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{24}{5} \\ \frac{32}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4.8 \\ 6.4 \end{pmatrix}$

Reflektierter Strahl: $x_r(\kappa) := \mathbf{OR} + \kappa \cdot (\mathbf{OK'} - \mathbf{OR})$

$$x_r(\kappa) = \begin{pmatrix} \kappa + 1 \\ 2.8 \cdot \kappa + 2 \\ 2.9 \cdot \kappa + \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

Darstellung



Dynamische Darstellung