Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2017

- **Mathematik 13 Technik - A I - Lösung mit CAS**

Teilaufgabe 1

Gegeben sind die Funktionen f_a mit $f_a(x) = \dfrac{50}{1+e^{-a\cdot x-1}}$ mit $a \in IR \setminus \{0\}$ und der Definitionsmenge $D_{f_a} = IR$.

Teilaufgabe 1.1 (7 BE)

Ermitteln Sie das Monotonieverhalten des Graphen von f_a sowie das Verhalten der Funktionswerte $f_a(x)$ an den Rändern von D_{f_a} jeweils in Abhängigkeit von a.

[Mögliches Teilergebnis: $f'_a(x) = \dfrac{50\cdot a\cdot e^{-a\cdot x-1}}{\left(1+e^{-a\cdot x-1}\right)^2}$]

$$f(x,a) := \frac{50}{1+e^{-a\cdot x-1}} \qquad f'(x,a) := \frac{d}{dx}f(x,a) \rightarrow \frac{50\cdot a\cdot e^{-a\cdot x-1}}{\left(e^{-a\cdot x-1}+1\right)^2}$$

für a>0 gilt: $f'(a) > 0$ $\Rightarrow$ G_{f_a} ist streng monoton steigend in IR.

für a<0 gilt: $f'(a) < 0$ $\Rightarrow$ G_{f_a} ist streng monoton fallend in IR.

für a>0 gilt:

$$\lim_{x\rightarrow-\infty}\frac{50}{1+e^{-a\cdot x-1}} \text{ annehmen}, a>0 \rightarrow 0$$

$$\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{50}{1+e^{-a\cdot x-1}} \text{ annehmen}, a>0 \rightarrow 50$$

$$f(0,a) \rightarrow \frac{50}{e^{-1}+1} = 36.553$$

für a<0 gilt:

$$\lim_{x\rightarrow-\infty}\frac{50}{1+e^{-a\cdot x-1}} \text{ annehmen}, a<0 \rightarrow 50$$

$$\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{50}{1+e^{-a\cdot x-1}} \text{ annehmen}, a<0 \rightarrow 0$$

Teilaufgabe 1.2 (9 BE)
Bestimmen Sie **ohne CAS** die Koordinaten des Wendepunkts des Graphen von f_{-1} und zeigen Sie **ohne CAS**, dass der Graph von f_{-1} symmetrisch zu diesem Wendepunkt verläuft.
[Teilergebnis: $x_W = 1$]

$$g(x) := f(x,-1) = \frac{50}{e^{x-1}+1} \qquad g'(x) := \frac{-50\cdot e^{x-1}}{\left(1+e^{x-1}\right)^2}$$

$$g''(x) = -50\cdot\frac{e^{x-1}\cdot\left(1+e^{x-1}\right)^2 - e^{x-1}\cdot e^{x-1}\cdot 2\cdot\left(1+e^{x-1}\right)}{\left(1+e^{x-1}\right)^4}$$

$$g''(x) = -50\cdot\frac{e^{x-1}\cdot\left(1+e^{x-1}\right)\cdot\left[\left(1+e^{x-1}\right)-2\cdot e^{x-1}\right]}{\left(1+e^{x-1}\right)^4}$$

$$g''(x) = \frac{-50\cdot e^{x-1}\cdot\left(1-e^{x-1}\right)}{\left(1+e^{x-1}\right)^3}$$

$$g''(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 1-e^{x-1} = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow 1 \qquad x_W := 1$$

Wendestelle, da einfache Nullstelle

$y_P := g(1) = 25$ Wendepunkt W(1/25)

$x = u + 1 \qquad y = v + 25$

$$v + 25 = \frac{50}{1+e^{u+1-1}} = \frac{50}{1+e^u}$$

$$f\_(u) = \frac{50}{1+e^u} - 25 = \frac{50-25\cdot\left(1+e^u\right)}{1+e^u} = \frac{25-25\cdot e^u}{1+e^u}$$

$$f\_(-u) = \frac{25-25\cdot e^{-u}}{1+e^{-u}}\cdot\frac{e^u}{e^u} = \frac{25e^u-25}{e^u+1} = -\frac{25-25\cdot e^u}{1+e^u} = -f\_(u)$$

$\Rightarrow$ Punktsymmetrie

Teilaufgabe 1.3 **(7 BE)**
Begründen Sie, dass die Funktion g mit $g(x) = f_{-1}(x)$ und $D_g = [\,0\,;\,\infty\,[$ umkehrbar ist.

Bestimmen Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der zugehörigen Umkehrfunktion g^{-1}.

Ermitteln Sie die Steigung der Tangente an den Graphen von g^{-1} im Punkt $Q\,(\,12.5\,|\,y_Q\,)$, ohne den Term der Umkehrfunktion zu bestimmen.

Der Graph von f_{-1} ist streng monoton fallend und somit auch G_g.

$$g(x) := f(x,-1) = \frac{50}{e^{x-1}+1}$$

$$g(0) = \frac{50}{e^{-1}+1} \qquad \lim_{x\to\infty} g(x) \to 0$$

$$W_g = \left]\,0;\ \frac{50}{e^{-1}+1}\,\right]$$

$$D_{g^{-1}} = \left]\,0;\ \frac{50}{e^{-1}+1}\,\right] \qquad W_{g^{-1}} = [\,0\,;\,\infty\,[$$

$$g(x) = \frac{25}{2} \text{ auflösen}, x \to \ln(3)+1 \qquad x_P := (\ln(3)+1)$$

$$g'(x) := \frac{d}{dx}g(x) = -\frac{50\cdot e^{x-1}}{\left(e^{x-1}+1\right)^2}$$

$$m := \frac{1}{g'(x_P)} \qquad m = -\frac{8}{75}$$

Teilaufgabe 1.4

Gegeben ist die Integralfunktion F_a durch $F_a(x) = \int_0^x f_a(t)\,dt$ mit $a < 0$ und der Definitionsmenge $D_{F_a} = IR$

Teilaufgabe 1.4.1 (6 BE)
Geben Sie, ohne die Integration durchzuführen, die Anzahl und die Lage der Nullstellen sowie eventuelle Extremstellen des Graphen von F_a an. Bestimmen Sie das Krümmungsverhalten des Graphen von F_a.

$F_a(0) = 0 \qquad x_1 = 0$

$$F'_a(x) = f_a(x) = \frac{50}{1 + e^{-a \cdot x - 1}}$$

$F'_a(x) = f_a(x)$ immer positiv, G_F streng monoton steigend

keine weiteren Nullstellen, keine Extremstellen.

$$F''_a(x) = f'_a(x) = \frac{50 \cdot a \cdot e^{-a \cdot x - 1}}{\left(1 + e^{-a \cdot x - 1}\right)^2}$$

$F''_a(x) < 0$ für alle x

$\Rightarrow \quad G_{F_a}$ ist rechtsgekrümmt

Teilaufgabe 1.4.2 (10 BE)
Bestimmen Sie jeweils **ohne CAS** eine integralfreie Darstellung des Funktionsterms $F_a(x)$ und den Grenzwert von $F_a(x)$ für $x \to +\infty$.

[mögliches Teilergebnis: $F_a(x) = \frac{50}{a} \cdot \ln\left(\frac{1 + e^{a \cdot x + 1}}{1 + e}\right)$]

$$\int \frac{50}{1 + e^{-a \cdot x - 1}}\,dx = \blacksquare$$

Substitution: $\qquad z = e^{-a \cdot x - 1} \qquad \frac{dz}{dx} = (-a) \cdot e^{-a \cdot x - 1} \qquad dx = \frac{dz}{\left[(-a) \cdot e^{-a \cdot x - 1}\right]}$

$$\int \frac{50}{1 + e^{-a \cdot x - 1}}\,dx = \int \frac{50}{1 + z} \cdot \frac{-1}{a \cdot z}\,dz = \frac{-50}{a} \cdot \int \frac{1}{(1 + z) \cdot z}\,dz$$

$$\frac{1}{(1 + z) \cdot z} = \frac{A}{1 + z} + \frac{B}{z} = \frac{A \cdot z + B \cdot (1 + z)}{(1 + z) \cdot z} = \frac{(A + B) \cdot z + B}{(1 + z) \cdot z}$$

Koeffizientenvergleich: $A + B = 0$, $B = 1$ $\Rightarrow$ $A = -1$

$$\frac{-50}{a}\cdot\int \frac{1}{(1+z)\cdot z}\,dz = \frac{-50}{a}\cdot\int \left(\frac{-1}{1+z}+\frac{1}{z}\right)dz = \frac{-50}{a}\cdot(-\ln(1+z)+\ln(z)) = \frac{-50}{a}\cdot\ln\left(\frac{z}{1+z}\right)$$

Resubstitution:

$$\int \frac{50}{1+e^{-a\cdot x-1}}\,dx = \frac{-50}{a}\cdot\ln\left(\frac{e^{-a\cdot x-1}}{1+e^{-a\cdot x-1}}\cdot\frac{e^{a\cdot x+1}}{e^{a\cdot x+1}}\right) = \frac{-50}{a}\cdot\ln\left(\frac{1}{1+e^{a\cdot x+1}}\right)$$

Grenzen einsetzen:

$$F_a(x) = \frac{-50}{a}\cdot\left(\ln\left(\frac{1}{1+e^{a\cdot x+1}}\right)-\ln\left(\frac{1}{1+e^{1}}\right)\right) = \frac{-50}{a}\cdot\left(-\ln\left(1+e^{a\cdot x+1}\right)+\ln(1+e)\right)$$

$$F_a(x) = \frac{-50}{a}\cdot\ln\left(\frac{1+e}{1+e^{a\cdot x+1}}\right) \qquad F1(x,a) := \frac{-50}{a}\cdot\ln\left(\frac{1+e}{1+e^{a\cdot x+1}}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-50}{a}\cdot\ln\left(\frac{1+e}{\underbrace{1+e^{a\cdot x+1}}_{\downarrow\ 0}}\right)\right)\ \text{annehmen},\ a<0 \ \rightarrow -\frac{50\cdot\ln(e+1)}{a}$$

Teilaufgabe 2.0

Gegeben ist die Differenzialgleichung $y' + \frac{x+2}{x+1}\cdot y = \frac{2\cdot\sin(x)}{x+1}$ mit $x > -1$.

Teilaufgabe 2.1 (10 BE)

Bestimmen Sie **ohne CAS** mit der Methode der Variation der Konstanten die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung.

[mögliches Ergebnis: $y(x) = \frac{\sin(x) - \cos(x) + D\cdot e^{-x}}{x+1}$

Homogene DGL $\quad y' + \frac{x+2}{x+1}\cdot y = 0 \qquad$ Triviale Lösung: $\quad y = 0$

Umformung: $\quad y' = -\frac{x+2}{x+1}\cdot y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'}{y} = -\frac{x+2}{x+1} \quad$ mit $y \neq 0$

Trennen der Variablen: $\quad \frac{dy}{y} = -\frac{x+2}{x+1}\cdot dx$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int -\frac{x+2}{x+1}\,dx \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{y}\,dy = \int -\frac{x+2}{x+1}\,dx$$

$$-\frac{x+2}{x+1} \text{ parfrac } \rightarrow -\frac{1}{x+1} - 1 \qquad \int \frac{1}{y}\,dy = \int \left(-\frac{1}{x+1} - 1\right) dx$$

$$\ln(|y|) = -\ln(x+1) - x + k$$

$y > 0 \qquad y = e^{-\ln(x+1)-x+k} = e^{-\ln(x+1)}\cdot e^{-x}\cdot e^{k} = \frac{e^{-x}}{x+1}\cdot K_1 \qquad$ mit $K_1 = e^k > 0$

$y < 0 \qquad y = -e^{-\ln(x+1)-x+k} = -\left(e^{-\ln(x+1)}\cdot e^{-x}\cdot e^{k}\right) = \frac{e^{-x}}{x+1}\cdot K_2 \qquad$ mit $K_2 = -e^k < 0$

Mit trivialer Lösung: $\quad y_H(x) = K\cdot\frac{e^{-x}}{x+1} \quad$ mit $K \in IR$

Variation der Konstanten: $\quad y_P(x) = K(x)\cdot\frac{e^{-x}}{x+1}$

$$y'_P(x) = K'(x)\cdot\frac{e^{-x}}{x+1} + K(x)\cdot\frac{e^{-x}\cdot(-1)\cdot(x+1) - e^{-x}\cdot 1}{(x+1)^2} = K'(x)\cdot\frac{e^{-x}}{x+1} + K(x)\cdot\frac{-e^{-x}\cdot(x+2)}{(x+1)^2}$$

einsetzen in inhomogene DGL: $y' + \frac{x+2}{x+1}\cdot y = \frac{2\cdot\sin(x)}{x+1}$

$$K'(x)\cdot\frac{e^{-x}}{x+1} + K(x)\cdot\frac{-e^{-x}\cdot(x+2)}{(x+1)^2} + \frac{x+2}{x+1}\cdot\left(K(x)\cdot\frac{e^{-x}}{x+1}\right) = \frac{2\cdot\sin(x)}{x+1}$$

Vereinfachen: $K'(x)\cdot\frac{e^{-x}}{x+1} = \frac{2\cdot\sin(x)}{x+1}$

Auflösen: $K'(x) = 2\cdot\sin(x)\cdot e^{x}$

Integrieren: $K(x) = \int 2\cdot\sin(x)\cdot e^{x}\,dx$

$u(x) = 2\cdot\sin(x)$ $\qquad u'(x) := 2\cdot\cos(x)$

$v'(x) = e^{x}$ $\qquad v(x) = e^{x}$

$$\int 2\cdot\sin(x)\cdot e^{x}\,dx = 2\cdot\sin(x)\cdot e^{x} - \int 2\cdot\cos(x)\cdot e^{x}\,dx$$

$u(x) = 2\cdot\cos(x)$ $\qquad u'(x) := -2\cdot\sin(x)$

$v'(x) = e^{x}$ $\qquad v(x) = e^{x}$

$$\int 2\cdot\sin(x)\cdot e^{x}\,dx = 2\cdot\sin(x)\cdot e^{x} - 2\cdot\cos(x)\cdot e^{x} - \int 2\cdot\sin(x)\cdot e^{x}\,dx$$

$$2\cdot\int 2\cdot\sin(x)\cdot e^{x}\,dx = 2\cdot\sin(x)\cdot e^{x} - 2\cdot\cos(x)\cdot e^{x}$$

$$\Rightarrow \qquad K(x) = \sin(x)\cdot e^{x} - \cos(x)\cdot e^{x} = (\sin(x) - \cos(x))\cdot e^{x}$$

spezielle Lösung: $y_P(x) = \left[(\sin(x) - \cos(x))\cdot e^{x}\right]\cdot\frac{e^{-x}}{x+1} = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{x+1}$

Allgemeine Lösung: $y_A(x) = K\cdot\frac{e^{-x}}{x+1} + \frac{\sin(x) - \cos(x)}{x+1}$

Teilaufgabe 2.2 (3 BE)
Bestimmen Sie die spezielle Lösung für $\mathbf{y(0) = 0}$ und untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte dieser speziellen Lösung für $x \to \infty$.

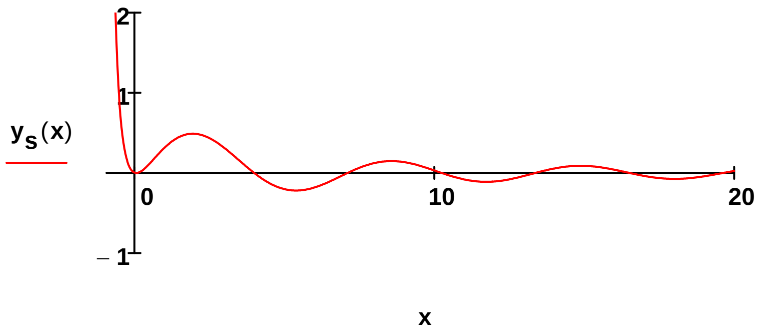
$$y_A(x, K) := K \cdot \frac{e^{-x}}{x + 1} + \frac{\sin(x) - \cos(x)}{x + 1}$$

$$y_A(0, K) = 0 \text{ auflösen}, K \;\to 1$$

spezielle Lösung: $$y_A(x, 1) \;=\; \frac{e^{-x}}{x + 1} - \frac{\cos(x) - \sin(x)}{x + 1}$$

$$\lim_{x \to \infty} y_A(x, 1) \;\to 0$$

$$y_S(x) := \frac{e^{-x} + \sin(x) - \cos(x)}{x + 1}$$

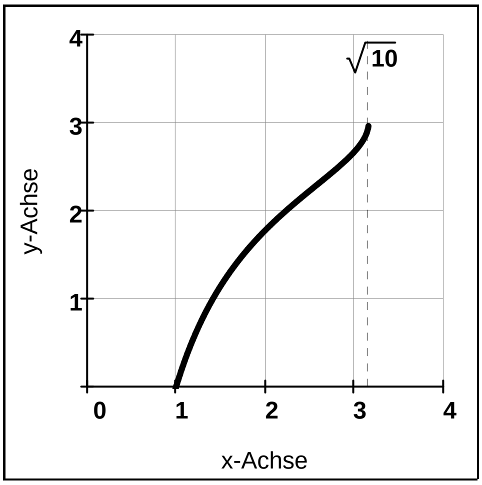


Teilaufgabe 3 (8 BE)
Für die maschinelle Herstellung von Pralinen wird eine Gussform gebaut. Die Gussform entsteht als rotationssymmetrischer Körper, der durch Rotation des Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = \frac{3\cdot x - \sqrt{10 - x^2}}{x}\ ,\ x \in]\,1\,;\,\sqrt{10}\,]$$

um die y-Achse entsteht, wobei x in cm gemessen wird.
Auf eine Mitführung der Einheiten wird verzichtet.

Berechnen Sie **ohne CAS** das Volumen V(b) einer Praline, wenn die Gussform von den Geraden mit den Gleichungen $y = 0$ und $y = b$ begrenzt wird, sowie den Näherungswert von V(3) auf zwei Nachkommastellen genau.



$$f(x) := \frac{3\cdot x - \sqrt{10 - x^2}}{x}$$

Rotation von G_u um die x-Achse:

$$x = \frac{3\cdot y - \sqrt{10 - y^2}}{y}$$

Auflösen nach y:

$$x\cdot y = 3\cdot y - \sqrt{10 - y^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sqrt{10 - y^2} = 3\cdot y - x\cdot y$$

$$10 - y^2 = 9\cdot y^2 - 6\cdot x\cdot y^2 + x^2\cdot y^2 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\left(10 - 6\cdot x + x^2\right)\cdot y^2 = 10$$

$$y^2 = \frac{10}{\left(10 - 6\cdot x + x^2\right)} = \frac{10}{1 + (x-3)^2}$$

Umkehrfunktion: $u(x) := \sqrt{\frac{10}{\left(10 - 6\cdot x + x^2\right)}}$

$$\int \frac{1}{(x-3)^2+1}\,dx = \arctan(x-3)$$

$$V(b) = \pi\cdot\int_0^b \frac{10}{(x-3)^2+1}\,dx = 10\cdot\pi\cdot(\arctan(b-3)-\arctan(-3))$$

$$V(b) := \pi\cdot\int_0^b \frac{10}{(x-3)^2+1}\,dx \;=\; \pi\cdot(10\cdot\operatorname{atan}(b-3)+10\cdot\operatorname{atan}(3)) \qquad V(3) = 39.24$$

2. Möglichkeit:

Rotation von G_f um die y-Achse:

$$f'(x) := \frac{d}{dx}f(x) \;=\; \frac{10}{x^2\cdot\sqrt{10-x^2}} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{10}{x^2\cdot\sqrt{10-x^2}} \qquad dy = \frac{10}{x^2\cdot\sqrt{10-x^2}}\cdot dx$$

$$V(b) = \left|\pi\cdot\int_1^{a(b)} x^2\,dy\right| = \left|\pi\cdot\int_1^{a(b)} x^2\cdot\frac{10}{x^2\cdot\sqrt{10-x^2}}\,dx\right|$$

$$V(b) = 10\cdot\pi\left|\int_1^{a(b)} \frac{1}{\sqrt{10-x^2}}\,dx\right|$$

$$V(b) = 10\cdot\pi\cdot\left|\operatorname{asin}\left(\frac{1}{\sqrt{b^2-6\cdot b+10}}\right)-\operatorname{asin}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right|$$

$$V(b) := 10\cdot\pi\cdot\left|\operatorname{asin}\left(\frac{1}{\sqrt{b^2-6\cdot b+10}}\right)-\operatorname{asin}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right|$$

$$V(3) \rightarrow -10\cdot\pi\cdot\left(\operatorname{asin}\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)-\frac{\pi}{2}\right) = 39.24$$