

# Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2017

## • Mathematik 13 Technik - A II - Lösung mit CAS



### Teilaufgabe 1

Gegeben ist die Funktion  $f_a$  mit  $f_a(x) = \frac{1}{x \cdot (1 - \ln(a \cdot x))^2}$  mit  $a \in \mathbb{R}^+$  und der maximalen Definitionsmenge  $D_{f_a} \subseteq \mathbb{R}$ .

### Teilaufgabe 1.1 (8 BE)

Zeigen Sie, dass gilt:  $D_{f_a} = \mathbb{R}^+ \setminus \{ \frac{e}{a} \}$ . Ermitteln Sie **ohne CAS** das Verhalten von  $f_a(x)$

für  $x \rightarrow 0^+$ . Ermitteln Sie außerdem die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen von  $f_a$ .

Nullstellen des Nenners:

$$x \cdot (1 - \ln(a \cdot x))^2 = 0 \text{ auflösen, } x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ e \\ a \end{pmatrix}$$

$$a \cdot x > 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{auflösen, } x \\ \text{annehmen, } a > 0 \end{array} \right. \rightarrow 0 < x \quad \Rightarrow \quad D_{f_a} = \mathbb{R}^+ \setminus \{ \frac{e}{a} \}$$

$\infty$

$\uparrow$  L'Hosp.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \cdot (1 - \ln(a \cdot x))^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{(1 - \ln(a \cdot x))^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{-1}{x^2}}{2 \cdot (1 - \ln(a \cdot x)) \cdot \frac{-1}{a \cdot x} \cdot a}$$

$\downarrow$

$\infty$

$\infty$

$\uparrow$  L'Hosp.

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{2 \cdot (1 - \ln(a \cdot x))} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{-1}{x^2}}{2 \cdot \frac{-1}{a \cdot x} \cdot a} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2 \cdot x} = \infty$$

$\downarrow$

$\infty$

$\Rightarrow$  senkrechte Asymptote:  $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{e}{a}^+} \frac{1}{x \cdot (1 - \ln(a \cdot x))^2} \quad \text{annehmen, } a > 0 \rightarrow \infty$$

$$\begin{array}{ccc} & \uparrow & \\ & 1 & \\ & \downarrow & \downarrow \\ \frac{e}{a} & & \infty \end{array}$$

⇒ senkrechte Asymptote:  $x = \frac{e}{a}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x \cdot (1 - \ln(a \cdot x))^2} \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \text{waagrechte Asymptote: } y = 0$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \\ \infty & \infty & \end{array}$$

**Teilaufgabe 1.2 (10 BE)**

Ermitteln Sie **ohne CAS** das Monotonieverhalten des Graphen von  $f_a$  sowie die Art und die Koordinaten des Extrempunktes des Graphen von  $f_a$  in Abhängigkeit von  $a$ .

[ Teilergebnis:  $f'_a(x) = \frac{1 + \ln(a \cdot x)}{x^2 \cdot (1 - \ln(a \cdot x))^3}$  ]

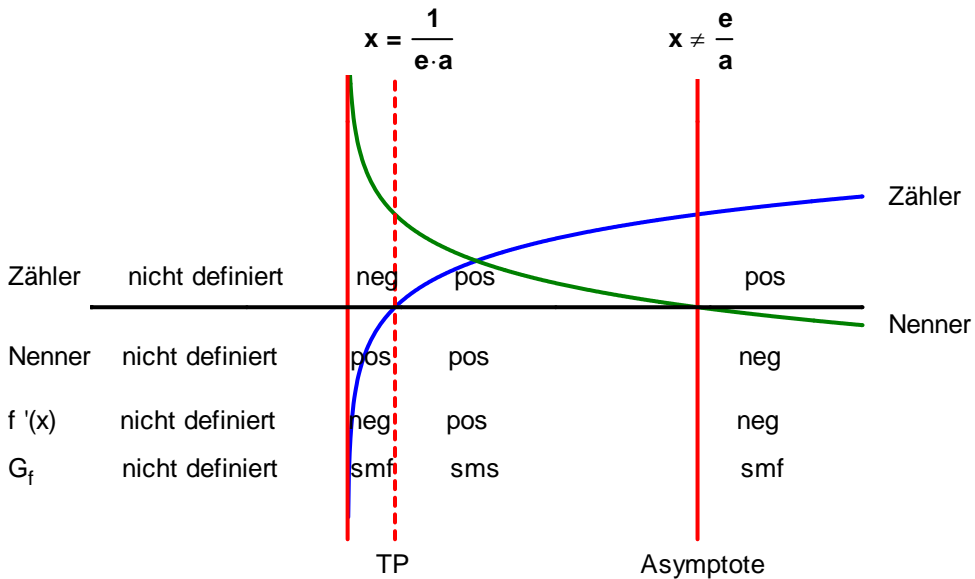
$$f'_a(x) = \frac{-1 \cdot \left[ 1 \cdot (1 - \ln(a \cdot x))^2 + x \cdot 2 \cdot (1 - \ln(a \cdot x)) \cdot \frac{-1}{a \cdot x} \cdot a \right]}{x^2 \cdot (1 - \ln(a \cdot x))^4}$$

$$f'_a(x) = \frac{-(1 - \ln(a \cdot x)) \cdot (1 - \ln(a \cdot x) - 2)}{x^2 \cdot (1 - \ln(a \cdot x))^4} = \frac{-(-\ln(a \cdot x) - 1)}{x^2 \cdot (1 - \ln(a \cdot x))^3}$$

$$f'_a(x) = \frac{1 + \ln(a \cdot x)}{x^2 \cdot (1 - \ln(a \cdot x))^3}$$

Horizontale Tangenten:

$$1 + \ln(a \cdot x) = 0 \text{ auflösen, } x \rightarrow \frac{e^{-1}}{a}$$



$G_f$  ist streng monoton fallend in  $] 0 ; \frac{1}{e \cdot a} [$

$G_f$  ist streng monoton steigend in  $[\frac{1}{e \cdot a} ; \frac{e}{a} [$

$G_f$  ist streng monoton fallend in  $] \frac{e}{a} ; \infty [$

$$f\left(\frac{1}{e \cdot a}\right) = \frac{1}{\frac{1}{e \cdot a} \cdot \left(1 - \ln\left(a \cdot \frac{1}{e \cdot a}\right)\right)^2} = \frac{e \cdot a}{(1 + 1)^2} = \frac{e \cdot a}{4}$$

Tiefpunkt:  $\text{TP}\left(\frac{1}{e \cdot a}, \frac{e \cdot a}{4}\right)$

**Teilaufgabe 1.3 (6 BE)**

Der Graph von  $f_a$  hat genau eine Tangente  $t_a$ , die durch den Ursprung verläuft. Ermitteln Sie die Koordinaten des zugehörigen Berührungspunktes  $B_a$  und die Gleichung der Tangente  $t_a$  in Abhängigkeit von  $a$ .

[ Teilergebnis:  $x_B = \frac{1}{a}$  ]

Steigung der Tangente:

$$f'(x_0) = \frac{1 + \ln(a \cdot x_0)}{x_0^2 \cdot (1 - \ln(a \cdot x_0))^3}$$

$$t_a(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Tangente durch den Ursprung:  $f'(x_0) \cdot (-x_0) + f(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0$

$$f(x_0, a) = f'(x_0, a) \cdot x_0 \text{ auflösen, } x_0 \rightarrow \frac{1}{a}$$

$$t(x, a) := f'\left(\frac{1}{a}, a\right) \cdot \left(x - \frac{1}{a}\right) + f\left(\frac{1}{a}, a\right)$$

$$t(x, a) = a + a^2 \cdot \left(x - \frac{1}{a}\right) = a^2 \cdot x$$

Berührungspunkt:  $B\left(\frac{1}{a}, a\right)$

**Für die folgenden Teilaufgaben gilt  $a = 1$ .**

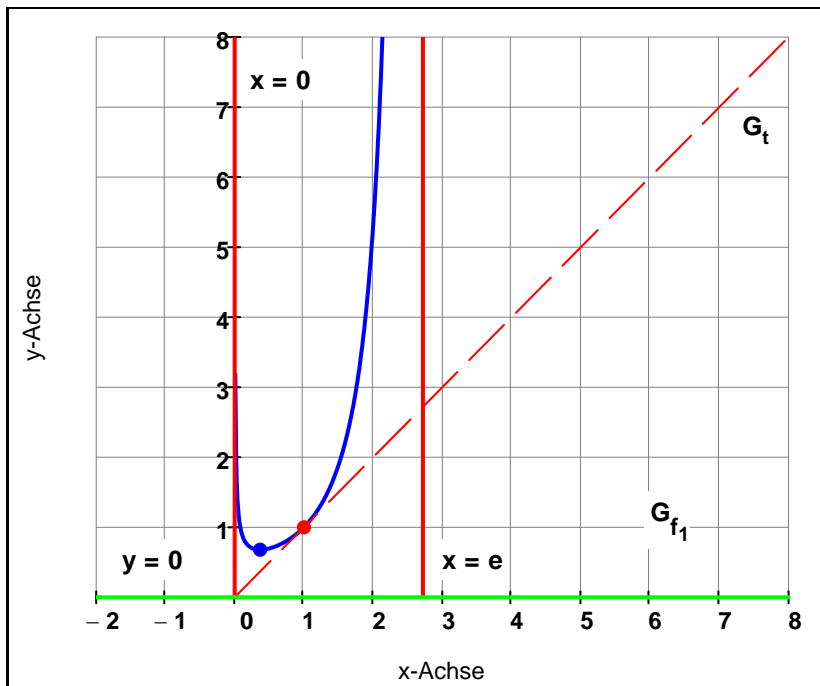
**Teilaufgabe 1.4 (5 BE)**

Zeichnen Sie den Graphen von  $f_1$  im Bereich  $0 < x \leq 8$  unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse in ein kartesisches Koordinatensystem (1 LE = 1 cm). Tragen Sie auch die zugehörigen Asymptoten und die Tangente  $t_1$  aus 1.3 ein.

$$f_1(x) := f(x, 1) = \frac{1}{x \cdot (\ln(x) - 1)^2}$$

$$t(x) := x$$

TP  $\left(\frac{1}{e}, \frac{e}{4}\right)$



$x_d =$	$f_1(x_d) =$
0.5	0.7
1	1
1.5	1.89
2	5.31
2.5	57.08
3	34.28
3.5	4.47
4	1.68
4.5	0.87
5	0.54
5.5	0.37
6	0.27
6.5	0.2
7	0.16
7.5	0.13
8	0.11

**Teilaufgabe 1.5 (6 BE)**

Der Graph von  $f_1$ , die Gerade mit der Gleichung  $x = 1$  und die Koordinatenachsen schließen im I. Quadranten eine Fläche ein, die sich nach oben ins Unendliche erstreckt. Ermitteln Sie **ohne CAS** die Maßzahl des Flächeninhalts dieser Fläche.

$$A = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x \cdot (\ln(x) - 1)^2} dx$$

$$F(x) = \int \frac{1}{x \cdot (\ln(x) - 1)^2} dx$$

Substitution:  $z = \ln(x) - 1$        $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$        $dx = x \cdot dz$

Einsetzen:  $\int \frac{1}{z^2} dz = \frac{1}{-2+1} \cdot z^{-2+1} = \frac{-1}{z}$

Resubstitution:  $F(x) = \frac{-1}{\ln(x) - 1} = \frac{1}{1 - \ln(x)}$

$$A = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{1 - \ln(1)} - \frac{1}{1 - \ln(a)} \right) = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left( 1 - \frac{1}{1 - \ln(a)} \right) = 1$$

↓  
∞

**Teilaufgabe 1.6 (5 BE)**

Gegeben ist nun die Funktion  $g$  mit  $g(x) = \arctan(f_1(x))$  mit der Definitionsmenge  $D_g = \mathbb{R}^+ \setminus \{e\}$ .

Ermitteln Sie das Monotonieverhalten des Graphen von  $g$  sowie das Verhalten der Funktionswerte  $g(x)$  an den Rändern von  $D_g$ .

$$g(x) = \arctan(f_1(x)) \quad g'(x) = \frac{1}{1 + (f_1(x))^2} \cdot f_1'(x)$$

Das Vorzeichen von  $g'(x)$  entspricht dem Vorzeichen von  $f_1'(x)$ .

$G_g$  ist streng monoton fallend in  $]0; \frac{1}{e \cdot a}]$

$G_g$  ist streng monoton steigend in  $[\frac{1}{e \cdot a}; \frac{e}{a}[$

$G_g$  ist streng monoton fallend in  $] \frac{e}{a}; \infty [$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan(f_1(x)) = \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(f_1(x)) = \arctan(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow e^-} \arctan(f_1(x)) = \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow e^+} \arctan(f_1(x)) = \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

**Teilaufgabe 2.0**

Gegeben ist weiter die Funktion  $h$  mit  $h(x) = \frac{4 \cdot \sqrt{x}}{x^2 + 3}$  mit der Definitionsmenge  $D_h = \mathbb{R}_0^+$ .

**Teilaufgabe 2.1 (6 BE)**

Begründen Sie, warum die Funktion  $p$  mit  $p(x) = h(x)$  mit der Definitionsmenge  $D_p = [1; \infty [$

umkehrbar ist. Ermitteln Sie die Steigung der Tangente an den Graphen von  $p^{-1}$  im Punkt  $Q(\frac{1}{7} | ?)$ .

$$p(x) := \frac{4 \cdot \sqrt{x}}{x^2 + 3}$$

$$p'(x) := \frac{d}{dx} p(x) \rightarrow \frac{2}{\sqrt{x} \cdot (x^2 + 3)} - \frac{8 \cdot x^{\frac{3}{2}}}{(x^2 + 3)^2} \text{ vereinfachen } \rightarrow -\frac{6 \cdot (x^2 - 1)}{\sqrt{x} \cdot (x^2 + 3)^2}$$

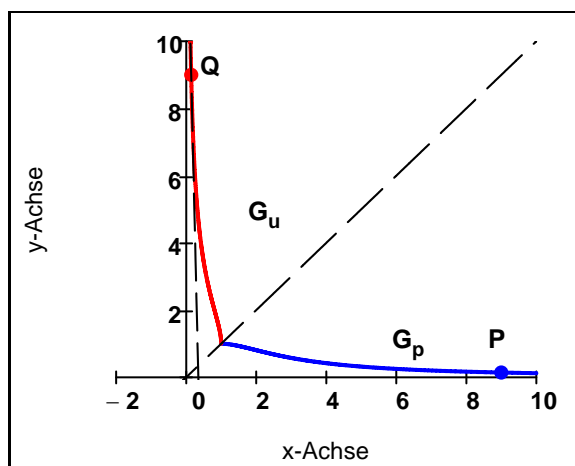
$p'(x) > 0$  auflösen,  $x \rightarrow 0 < x < 1$

$p'(x) < 0$  auflösen,  $x \rightarrow 1 < x$

$\Rightarrow G_p$  ist streng monoton fallend in  $[1; \infty[$ , also umkehrbar.

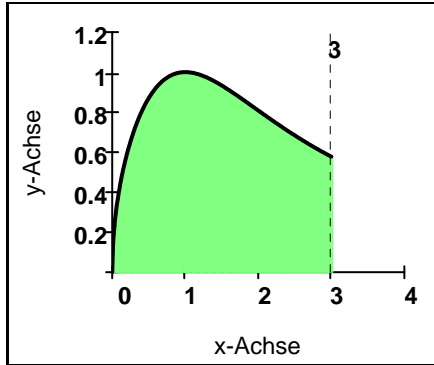
$$p(x) = \frac{1}{7} \left| \begin{array}{l} \text{auflösen, } x \\ \text{annehmen, } x > 1 \end{array} \right. \rightarrow 9$$

Steigung der Tangente:  $m_u := \frac{1}{p'(9)} = -\frac{441}{10}$



**Teilaufgabe 2.2 (5 BE)**

Der Graph von  $h$ , die  $x$ -Achse und die Gerade mit der Gleichung  $x = 3$  schließen eine Fläche  $A$  ein. Bei der Rotation der Fläche  $A$  um die  $x$ -Achse entsteht ein Rotationskörper. Berechnen Sie **ohne CAS** die Maßzahl des Volumens des Rotationskörpers.



$$V = \pi \cdot \int_0^3 (h(x))^2 dx = \pi \cdot \int_0^3 \frac{16 \cdot x}{(x^2 + 3)^2} dx$$

Substitution:  $z = x^2 + 3$        $\frac{dz}{dx} = 2 \cdot x$        $dx = \frac{dz}{2 \cdot x}$

$$\int \frac{16 \cdot x}{(x^2 + 3)^2} dx = \int \frac{8}{z^2} dz = \frac{8}{-2 + 1} \cdot z^{-2+1} = \frac{-8}{z}$$

Resubstitution:

$$F(x) = \frac{-8}{x^2 + 3}$$

$$V = \pi \cdot \left( \frac{-8}{3^2 + 3} + \frac{8}{3} \right) = 2 \cdot \pi$$



**Teilaufgabe 3 (9 BE)**

Gegeben ist die Differentialgleichung  $y' \cdot \sin(x) + y \cdot \cos(x) = (x^2 + 2) \cdot \sin(x)$  mit  $x \in ]0; \pi[$ .  
Bestimmen Sie **ohne CAS** die allgemeine Lösung der Differentialgleichung mit der Methode der Variation der Konstanten.

Homogene DGL:  $y' \cdot \sin(x) + y \cdot \cos(x) = 0$

Triviale Lösung:  $y = 0$

auflösen:  $y' = -y \cdot \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

Trennen der Variablen:  $\frac{1}{y} \cdot dy = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \cdot dx$

Integration:  $\int \frac{1}{y} dy = \int -\frac{\cos(x)}{\sin(x)} dx$

$$\ln(|y|) = -\ln(\sin(x))$$

$y > 0$   $y = e^{-\ln(\sin(x))+k} = \frac{1}{\sin(x)} \cdot K_1$  mit  $K_1 = e^k > 0$

$y < 0$   $y = -e^{-\ln(\sin(x))+k} = -\frac{1}{\sin(x)} \cdot K_2$  mit  $K_2 = -e^k < 0$

Mit trivialer Lösung:  $y_H(x) = K \cdot \frac{1}{\sin(x)}$  mit  $K \in \mathbb{R}$

Variation der Konstanten:  $y_p(x) = K(x) \cdot \frac{1}{\sin(x)}$

$$y'_p(x) = K'(x) \cdot \frac{1}{\sin(x)} + K(x) \cdot \frac{-1}{(\sin(x))^2} \cdot \cos(x)$$

Inhomogene DGL:  $y' \cdot \sin(x) + y \cdot \cos(x) = (x^2 + 2) \cdot \sin(x)$

Einsetzen:

$$\left[ K'(x) \cdot \frac{1}{\sin(x)} + K(x) \cdot \frac{-1}{(\sin(x))^2} \cdot \cos(x) \right] \cdot \sin(x) + K(x) \cdot \frac{1}{\sin(x)} \cdot \cos(x) = (x^2 + 2) \cdot \sin(x)$$

Vereinfachen:

$$K'(x) + K(x) \cdot \frac{-1}{\sin(x)} \cdot \cos(x) + K(x) \cdot \frac{1}{\sin(x)} \cdot \cos(x) = (x^2 + 2) \cdot \sin(x)$$

$$K'(x) = (x^2 + 2) \cdot \sin(x)$$

$$K(x) = \int (x^2 + 2) \cdot \sin(x) \, dx$$

$$u(x) = x^2 + 2 \quad u'(x) = 2 \cdot x$$

$$v'(x) = \sin(x) \quad v(x) = -\cos(x)$$

$$\int (x^2 + 2) \cdot \sin(x) \, dx = (x^2 + 2) \cdot (-\cos(x)) + \int 2 \cdot x \cdot (\cos(x)) \, dx$$

$$u(x) = 2 \cdot x \quad u'(x) = 2$$

$$v'(x) = \cos(x) \quad v(x) = \sin(x)$$

$$\int (x^2 + 2) \cdot \sin(x) \, dx = (x^2 + 2) \cdot (-\cos(x)) + 2 \cdot x \cdot \sin(x) - \int 2 \cdot \sin(x) \, dx$$

$$\Rightarrow K(x) = (x^2 + 2) \cdot (-\cos(x)) + 2 \cdot x \cdot \sin(x) + 2 \cdot \cos(x)$$

Einsetzen: 
$$y_p(x) = \frac{-x^2 \cdot \cos(x) + 2 \cdot x \cdot \sin(x)}{\sin(x)} = -x^2 \cdot \frac{\cos(x)}{\sin(x)} + 2 \cdot x$$

Allgemeine Lösung: 
$$y_A(x) = K \cdot \frac{1}{\sin(x)} + 2 \cdot x - x^2 \cdot \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$