Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2017

- **Mathematik 13 Technik - A II - Lösung**

Teilaufgabe 1

Gegeben ist die Funktion f_a mit $f_a(x) = \dfrac{1}{x\cdot(1-\ln(a\cdot x))^2}$ mit $a \in IR^+$ und der maximalen Definitionsmenge $D_{f_a} \subseteq IR$.

Teilaufgabe 1.1 (9 BE)

Zeigen Sie, dass gilt: $D_{f_a} = IR^+ \setminus \{ \frac{e}{a} \}$. Ermitteln Sie das Verhalten von $f_a(x)$ an den Rändern von D_{f_a} und geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Gaphen von f_a an.

$$1-\ln(a\cdot x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(a\cdot x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a\cdot x = e \qquad x = \frac{e}{a}$$

$$a\cdot x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x\cdot(1-\ln(a\cdot x))^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overset{\infty}{\overset{\uparrow}{\frac{1}{x}}}}{\underset{\infty}{\underset{\downarrow}{(1-\ln(a\cdot x))^2}}} \overset{\text{L' Hosp.}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-1}{x^2}}{2\cdot(1-\ln(a\cdot x))\cdot\frac{-1}{a\cdot x}\cdot a}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\overset{\infty}{\overset{\uparrow}{\frac{1}{x}}}}{\underset{\infty}{\underset{\downarrow}{2\cdot(1-\ln(a\cdot x))}}} \overset{\text{L' Hosp.}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-1}{x^2}}{2\cdot\frac{-1}{a\cdot x}\cdot a} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2\cdot x} = \infty$$

$\Rightarrow$ senkrechte Asymptote: $x = 0$

$$\lim_{x \to \frac{e}{a}^+} \frac{\overset{\overset{1}{\uparrow}}{1}}{\underset{\underset{\frac{e}{a}}{\downarrow}}{x} \cdot \underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{(1 - \ln(a \cdot x))^2}} \text{ annehmen}, a > 0 \ \rightarrow \infty$$

$\Rightarrow$ senkrechte Asymptote: $x = \frac{e}{a}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{x} \cdot \underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{(1 - \ln(a \cdot x))^2}} \rightarrow 0$$

$\Rightarrow$ waagrechte Asymptote: $y = 0$

Teilaufgabe 1.2 (10 BE)
Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle des Graphen von f_a sowie die Art und die Koordinaten des Extrempunktes des Graphen von f_a in Abhängigkeit von a.

[Teilergebnis: $f'_a(x) = \frac{1 + \ln(a \cdot x)}{x^2 \cdot (1 - \ln(a \cdot x))^3}$]

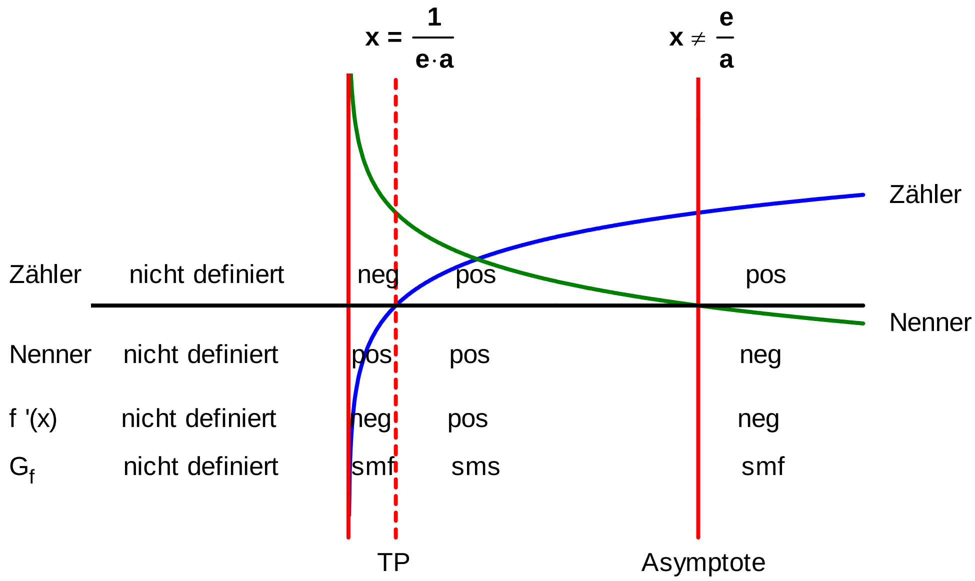
$$f'_a(x) = \frac{-1 \cdot \left[1 \cdot (1 - \ln(a \cdot x))^2 + x \cdot 2 \cdot (1 - \ln(a \cdot x)) \cdot \frac{-1}{a \cdot x} \cdot a\right]}{x^2 \cdot (1 - \ln(a \cdot x))^4}$$

$$f'_a(x) = \frac{-(1 - \ln(a \cdot x)) \cdot (1 - \ln(a \cdot x) - 2)}{x^2 \cdot (1 - \ln(a \cdot x))^4} = \frac{-(-\ln(a \cdot x) - 1)}{x^2 \cdot (1 - \ln(a \cdot x))^3}$$

$$f'_a(x) = \frac{1 + \ln(a \cdot x)}{x^2 \cdot (1 - \ln(a \cdot x))^3}$$

Horizontale Tangenten:

$$1 + \ln(a \cdot x) = 0 \text{ auflösen}, x \ \rightarrow \frac{e^{-1}}{a}$$



G_f ist streng monoton fallend in $\left]\, 0 \,;\, \frac{1}{e \cdot a} \,\right]$

G_f ist streng monoton steigend in $\left[\, \frac{1}{e \cdot a} \,;\, \frac{e}{a} \,\right[$

G_f ist streng monoton fallend in $\left]\, \frac{e}{a} \,;\, \infty \,\right[$

$$f\left(\frac{1}{e \cdot a}\right) = \frac{1}{\frac{1}{e \cdot a} \cdot \left(1 - \ln\left(a \cdot \frac{1}{e \cdot a}\right)\right)^2} = \frac{e \cdot a}{(1 + 1)^2} = \frac{e \cdot a}{4}$$

Tiefpunkt: $TP\left(\frac{1}{e \cdot a}, \frac{e \cdot a}{4}\right)$

Teilaufgabe 1.3 (8 BE)
Der Graph von f_a hat genau eine Tangente t_a, die durch den Ursprung verläuft. Ermitteln Sie die Koordinaten des zugehörigen Berührpunktes B_a und die Gleichung der Tangente t_a in Abhängigkeit von a.
[Teilergebnis: $x_B = \frac{1}{a}$]

Steigung der Tangente:

$$f'(x_0) = \frac{1 + \ln(a \cdot x_0)}{x_0^2 \cdot (1 - \ln(a \cdot x_0))^3}$$

$$t_a(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Tangente durch den Ursprung: $f'(x_0) \cdot (-x_0) + f(x_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0$

$$\frac{1}{x_0 \cdot (1 - \ln(a \cdot x_0))^2} = \frac{1 + \ln(a \cdot x_0)}{x_0^2 \cdot (1 - \ln(a \cdot x_0))^3} \cdot x_0$$

Vereinfachen: $1 = \frac{1 + \ln(a \cdot x_0)}{1 - \ln(a \cdot x_0)} \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \ln(a \cdot x_0) = 1 + \ln(a \cdot x_0)$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(a \cdot x_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot x_0 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = \frac{1}{a}$$

$$t_a(x) = f'\left(\frac{1}{a}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{a}\right) + f\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$t_a(x) = \frac{1 + \ln\left(a \cdot \frac{1}{a}\right)}{\left(\frac{1}{a}\right)^2 \cdot \left(1 - \ln\left(a \cdot \frac{1}{a}\right)\right)^3} \cdot \left(x - \frac{1}{a}\right) + \frac{1}{\frac{1}{a} \cdot \left(1 - \ln\left(a \cdot \frac{1}{a}\right)\right)^2}$$

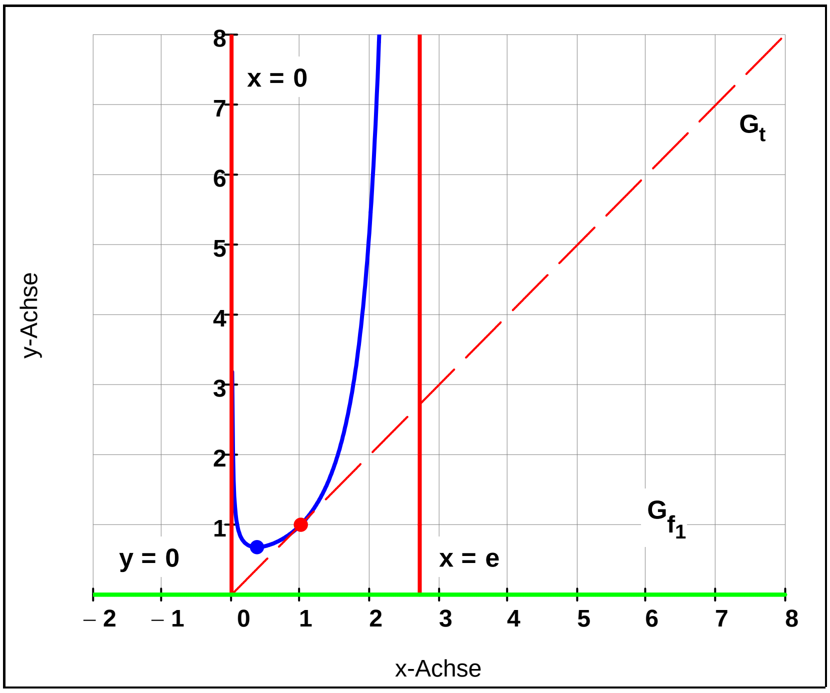
$$t_a(x) = a^2 \cdot \left(x - \frac{1}{a}\right) + a$$

$t_a(x) = a^2 \cdot x$ Berührpunkt: $B\left(\frac{1}{a}, a\right)$

Für die folgenden Teilaufgaben gilt a = 1.

Teilaufgabe 1.4 **(5 BE)**
Zeichnen Sie den Graphen von f_1 im Bereich $0 < x \le 8$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse in ein kartesisches Koordinatensystem (1 LE = 1 cm). Tragen Sie auch die zugehörigen Asymptoten und die Tangente t_1 aus 1.3 ein.

$$f_1(x) := f(x,1) = \frac{1}{x\cdot(\ln(x)-1)^2} \qquad t(x) := x \qquad TP\left(\frac{1}{e}, \frac{e}{4}\right)$$



$x_d =$	$f_1(x_d) =$
0.5	0.7
1	1
1.5	1.89
2	5.31
2.5	57.08
3	34.28
3.5	4.47
4	1.68
4.5	0.87
5	0.54
5.5	0.37
6	0.27
6.5	0.2
7	0.16
7.5	0.13
8	0.11

Teilaufgabe 1.5 (6 BE)
Der Graph von f_1 , die Gerade mit der Gleichung x = 1 und die Koordinatenachsen schließen im I. Quadanten eine Fläche ein, die sich nach oben ins Unendliche erstreckt.
Ermitteln Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieser Fläche.

$$A = \lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x \cdot (\ln(x) - 1)^2} \, dx$$

$$F(x) = \int \frac{1}{x \cdot (\ln(x) - 1)^2} \, dx$$

Substitution: $z = \ln(x) - 1$ $\quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$ $\quad dx = x \cdot dz$

Einsetzen: $\int \frac{1}{z^2} \, dz = \frac{1}{-2+1} \cdot z^{-2+1} = \frac{-1}{z}$

Resubstitution: $F(x) = \frac{-1}{\ln(x) - 1} = \frac{1}{1 - \ln(x)}$

$$A = \lim_{a \to 0^+} \left(\frac{1}{1 - \ln(1)} - \frac{1}{1 - \ln(a)} \right) = \lim_{a \to 0^+} \left(1 - \frac{1}{\underset{\downarrow \atop \infty}{1 - \ln(a)}} \right) = 1$$

Teilaufgabe 1.6 (5 BE)
Gegeben ist nun die Funktion g mit $g(x) = \arctan(f_1(x))$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}^+ \setminus \{e\}$.

Ermitteln Sie das Monotonieverhalten des Graphen von g sowie das Verhalten der Funktionswerte g(x) an den Rändern von D_g.

$$g(x) = \operatorname{actan}(f_1(x)) \qquad g'(x) = \frac{1}{1 + (f_1(x))^2} \cdot f'_1(x)$$

Das Vorzeichen von $g'(x)$ entspricht dem Vorzeichen von $f'_1(x)$.

G_g ist streng monoton fallend in $]\, 0 ; \frac{1}{e \cdot a} \,]$

G_g ist streng monoton steigend in $\left[\frac{1}{e\cdot a};\frac{e}{a}\right[$

G_g ist streng monoton fallend in $\left]\frac{e}{a};\infty\right[$

$$\lim_{x\to 0^+} \arctan\left(f_1(x)\right) = \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to \infty} \arctan\left(f_1(x)\right) = \arctan(0) = 0$$

$$\lim_{x\to e^-} g(x) \to g(e) \qquad \lim_{x\to e^+} g(x) \to g(e)$$

Teilaufgabe 2.0

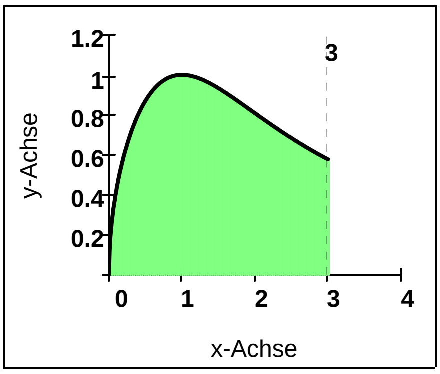
Gegeben ist weiter die Funktion h mit $h(x) = \frac{4\cdot\sqrt{x}}{x^2+3}$ mit der Definitionsmenge $D_h = IR_0^+$.

Teilaufgabe 2.1 **(3 BE)**
Ermitteln Sie die Nullstelle von h und das Verhalten von h(x) für $x \to \infty$.

$h(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x} = 0 \qquad x_0 = 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overset{\overset{\infty}{\uparrow}}{4\cdot\sqrt{x}}}{\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{x^2+3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}}{2\cdot x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{\sqrt{x^3}}} = 0$$

Teilaufgabe 2.2 (5 BE)
Der Graph von h, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 3$ schließen eine Fläche A ein. Bei der Rotation der Fläche A um die x-Achse entsteht ein Rotationskörper. Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens des Rotationskörpers.



$$V = \pi \cdot \int_0^3 (h(x))^2 \, dx = \pi \cdot \int_0^3 \frac{16 \cdot x}{\left(x^2 + 3\right)^2} \, dx$$

Substitution: $\quad z = x^2 + 3 \qquad \frac{dz}{dx} = 2 \cdot x \qquad dx = \frac{dz}{2 \cdot x}$

$$\int \frac{16 \cdot x}{\left(x^2 + 3\right)^2} \, dx = \int \frac{8}{z^2} \, dz = \frac{8}{-2+1} \cdot z^{-2+1} = \frac{-8}{z}$$

Resubstitution:

$$F(x) = \frac{-8}{x^2 + 3}$$

$$V = \pi \cdot \left(\frac{-8}{3^2 + 3} + \frac{8}{3} \right) = 2 \cdot \pi$$

Teilaufgabe 3 (9 BE)

Gegeben ist die Differenzialgleichung $y'\cdot\sin(x) + y\cdot\cos(x) = \left(x^2 + 2\right)\cdot\sin(x)$ mit $x \in]\,0\,;\,\pi\,[$.
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung mit der Methode der Variation der Konstanten.

Homogene DGL: $y'\cdot\sin(x) + y\cdot\cos(x) = 0$

Triviale Lösung: $y = 0$

auflösen: $y' = -y\cdot\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$

Trennen der Variablen: $\dfrac{1}{y}\cdot dy = -\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}\cdot dx$

Integration: $\displaystyle\int \frac{1}{y}\,dy = \int -\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx$

$$\ln(|y|) = -\ln(\sin(x))$$

$y > 0$ $\quad y = e^{-\ln(\sin(x))+k} = \dfrac{1}{\sin(x)}\cdot K_1$ $\quad$ mit $K_1 = e^k > 0$

$y < 0$ $\quad y = -e^{-\ln(\sin(x))+k} = \dfrac{1}{\sin(x)}\cdot K_2$ $\quad$ mit $K_2 = -e^k < 0$

Mit trivialer Lösung: $y_H(x) = K\cdot\dfrac{1}{\sin(x)}$ $\quad$ mit $K \in \mathrm{IR}$

Variation der Konstanten: $y_p(x) = K(x)\cdot\dfrac{1}{\sin(x)}$

$$y'_p(x) = K'(x)\cdot\frac{1}{\sin(x)} + K(x)\cdot\frac{-1}{(\sin(x))^2}\cdot\cos(x)$$

Inhomogene DGL: $y'\cdot\sin(x) + y\cdot\cos(x) = \left(x^2 + 2\right)\cdot\sin(x)$

Einsetzen:

$$\left[K'(x)\cdot\frac{1}{\sin(x)} + K(x)\cdot\frac{-1}{(\sin(x))^2}\cdot\cos(x)\right]\cdot\sin(x) + K(x)\cdot\frac{1}{\sin(x)}\cdot\cos(x) = \left(x^2 + 2\right)\cdot\sin(x)$$

Vereinfachen:

$$K'(x) + K(x)\cdot\frac{-1}{(\sin(x))}\cdot\cos(x) + K(x)\cdot\frac{1}{\sin(x)}\cdot\cos(x) = \left(x^2+2\right)\cdot\sin(x)$$

$$K'(x) = \left(x^2+2\right)\cdot\sin(x)$$

$$K(x) = \int \left(x^2+2\right)\cdot\sin(x)\,dx$$

$u(x) = x^2 + 2$ $\qquad$ $u'(x) = 2\cdot x$

$v'(x) = \sin(x)$ $\qquad$ $v(x) = -\cos(x)$

$$\int \left(x^2+2\right)\cdot\sin(x)\,dx = \left(x^2+2\right)\cdot(-\cos(x)) + \int 2\cdot x\cdot(\cos(x))\,dx$$

$u(x) = 2\cdot x$ $\qquad$ $u'(x) = 2$

$v'(x) = \cos(x)$ $\qquad$ $v(x) = \sin(x)$

$$\int \left(x^2+2\right)\cdot\sin(x)\,dx = \left(x^2+2\right)\cdot(-\cos(x)) + 2\cdot x\cdot\sin(x) - \int 2\cdot\sin(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad K(x) = \left(x^2+2\right)\cdot(-\cos(x)) + 2\cdot x\cdot\sin(x) + 2\cdot\cos(x)$$

Einsetzen: $\qquad y_p(x) = \dfrac{-x^2\cdot\cos(x) + 2\cdot x\cdot\sin(x)}{\sin(x)} = -x^2\cdot\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} + 2\cdot x$

Allgemeine Lösung: $\qquad y_A(x) = K\cdot\dfrac{1}{\sin(x)} + 2\cdot x - x^2\cdot\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$