Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2017

- **Mathematik 13 Technik - B I - Lösung**

made with mathcad

Teilaufgabe 1 (7 BE)
Am Timmendorfer Strand findet alljährlich im Juni eine Segelregatta statt. Erfahrungsgemäß kommen 23% der Besucher aus dem Ausland, jeder neunte Besucher segelt selbst regelmäßig in seiner Freizeit. Verwenden Sie für die folgenden Berechnungen die Normalverteilung als Näherung.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse
E_1: *Von 200 Besuchern segeln mindestens 20 selbst in ihrer Freizeit.*
E_2: *Von 200 Besuchern kommen genau fünfzig aus dem Ausland.*

$n_0 := 200 \qquad p := \frac{1}{9} \qquad \mu := n_0 \cdot p = 22.222 \qquad \sigma := \sqrt{n_0 \cdot p \cdot (1-p)} = 4.444$

$$P(E_1) = P(X \geq 20) = 1 - P(X \leq 19) = 1 - \Phi\left(\frac{19 - \mu + 0.5}{\sigma}\right) = 1 - \Phi(-0.612) = \Phi(0.612) = 0.72907$$

$n_0 := 200 \qquad p := 0.23 \qquad \mu := n_0 \cdot p = 46 \qquad \sigma := \sqrt{n_0 \cdot p \cdot (1-p)} = 5.951$

$$P(E_2) = \frac{1}{\sigma} \cdot \varphi\left(\frac{50 - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{5.951} \cdot \varphi(0.672) = \frac{1}{5.951} \cdot 0.31874 = 0.05356$$

Teilaufgabe 2 (7 BE)
Die Windstärke wird in Beaufort (Bft) gemessen. Sie reicht von absoluter Windstille (0 Bft) bis hin zur Orkanstärke (12 Bft). Im Bereich der Windstärken 1 bis 4 einschließlich zeigen sich auf dem Wasser nur kleine Wellen.
In der folgenden Tabelle steht die Zufalllsgröße X für die Windstärke in Bft mit der jeweiligen Wahrscheinlichkeit für das Auftreten am Timmendorfer Strand im Juni (a, b $\in$ IR):

$$\begin{pmatrix} \text{"x in Bft"} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \text{"P(X = x)"} & a & 2a & b^2 & \frac{b}{3} & 0.12 & 0.15 & 7a & 0.12 & 0.09 & 3a & 2a & a & 0.01 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Parameter a und b für den Fall, dass der Wind im Juni mit 35% Wahrscheinlichkeit kleine Wellen auf dem Wasser erzeugt. Bestimmen Sie weiterhin, mit welcher Windstärke im Mittel zu rechnen ist. [Teilergebnis: **a = 0.02**]

Gegeben: $\qquad P(1 \leq X \leq 4) = 0.35$

$$2 \cdot a + b^2 + \frac{b}{3} + 0.12 = 0.35 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2 \cdot a + b^2 + \frac{b}{3} = 0.23 \qquad \text{(I)}$$

$$a + 2 \cdot a + b^2 + \frac{b}{3} + 0.15 + 7 \cdot a + 0.12 + 0.09 + 3 \cdot a + 2 \cdot a + a + 0.01 = 1 \qquad \text{(II)}$$

(I) in (II) $\quad 14 \cdot a + 0.72 = 1 \qquad 14 \cdot a = 0.28 \qquad a = 0.02$

$$b^2 + \frac{b}{3} - 0.19 = 0 \text{ auflösen}, b \rightarrow \begin{pmatrix} 0.3 \\ -0.63333333333333333333 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} b = 0.3 \\ \text{keine Lösung} \end{matrix}$$

Erwartungswert:

$$\mu := 1 \cdot 0.04 + 2 \cdot 0.09 + 3 \cdot 0.1 + 4 \cdot 0.12 + 5 \cdot 0.15 + 6 \cdot 0.14 + 7 \cdot 0.12 + 8 \cdot 0.09 + 9 \cdot 0.06 + 10 \cdot 0.04 + 11 \cdot 0.02 + \ldots$$

$$\mu = 5.43$$

Teilaufgabe 3
Für die Regatta benötigt der Veranstalter 250 langfristig intakte Bojen. Bei den Bojen treten jedoch durch Materialfehler im Laufe der Zeit Schäden auf, verursacht durch hohen Wellengang bzw. durch UV-Strahlung.

Teilaufgabe 3.1 (6 BE)
Nach Angaben des Herstellers erleiden 5% der Bojen nach einer gewissen Einsatzzeit einen Wellenschaden, 40% von diesen Bojen sind zudem anfällig gegenüber dauerhafter UV-Strahlung. 90% aller Bojen sind sowohl gegenüber hohen Wellen als auch dauerhafter UV-Strahlung unempfindlich, also langfristig intakt.
Bestimmen Sie den Anteil der gegenüber UV-Strahlung empfindlichen Bojen unter denen,die gegenüber großen Wellen unempfindlich sind.

W: Wellenschaden $\quad p_W := 0.05 \qquad\qquad p := p$

U: Schaden durch UV-Strahlung

$$P_W(U) = \frac{P(W \cap U)}{P(W)} = 0.40 \quad \Rightarrow \quad P(W \cap U) = 0.05 \cdot 0.40 = 0.02$$

$$P\left(\overline{W} \cap \overline{U}\right) = 0.90$$

Lösung mit Vierfeldertafel:

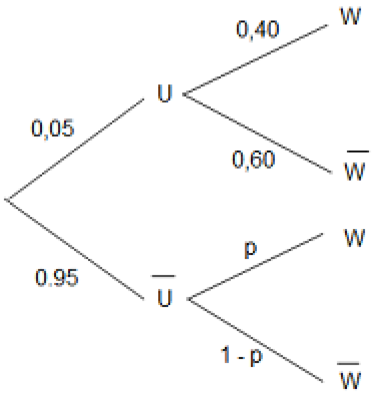
$$\begin{bmatrix} \blacksquare & U & \overline{U} & \blacksquare \\ W & 0.02 & 0.03 & 0.05 \\ \overline{W} & p \cdot 0.95 & (1-p) \cdot 0.95 & 0.95 \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & 1 \end{bmatrix}$$

$$P\left(\overline{W} \cap \overline{U}\right) = 0.90$$

$$(1-p) \cdot 0.95 = 0.90$$

$$(1-p) \cdot \frac{95}{100} = \frac{90}{100} \text{ auflösen}, p \rightarrow \frac{1}{19} \qquad p_0 := \frac{1}{19}$$

Lösung mit Baumdiagramm:



$$P\left(\overline{U}\ \overline{W}\right) = 0.95 \cdot (1 - p)$$

$$0.95 \cdot (1 - p) = 0.90$$

$$(1 - p) \cdot \frac{95}{100} = \frac{90}{100} \text{ auflösen}, p \rightarrow \frac{1}{19}$$

Teilaufgabe 3.2 **(8 BE)**
Ermitteln Sie, wie viele Bojen der Veranstalter mindestens bereit halten muss, damit mit mehr als 99% Wahrscheinlichkeit mindestens 250 langfristig intakte Bojen zur Verfügung stehen, wenn 90% aller Bojen langfristig intakt sind.

n unbekannt $\quad p := 0.90 \qquad \mu(n) := n \cdot p = 0.9 \cdot n$

$$\sigma(n) := \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{0.09 \cdot n}$$

$$P(X \geq 250) > 0.99 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X \leq 249) > 0.99 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \leq 249) < 0.01$$

$$\Phi\left(\frac{249 - \mu(n) + 0.5}{\sigma(n)}\right) < 0.01 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{249 - \mu(n) + 0.5}{\sigma(n)} < -2.326$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < -2.326 \cdot 0.3 \cdot \sqrt{n} - 249.5 + 0.9 \cdot n$$

Substitution: $\quad z = \sqrt{n}$

$$0.9 \cdot z^2 - 0.6978 \cdot z - 249.5 > 0 \ \left|\begin{array}{l} \text{auflösen}, z \\ \text{Gleitkommazahl}, 5 \end{array}\right. \rightarrow -\infty < z < -16.267 \vee 17.042 < z < \infty$$

Lösung: $\quad z > 17.042$

Resubstitution: $\quad n > 17.042^2 \rightarrow n > 290.429764$

aufrunden: $\quad n := 291$

Es müssen mindestens 291 Bojen bereit gehalten werden.

Teilaufgabe 3.3 (7 BE)
Vor einem Regattawochenende mit erwartetem hohem Wellengang vermutet der Veranstalter, dass sich der Anteil der Bojen mit Schäden durch hohe Wellen erhöhrt hat. Der Hersteller jedoch beharrt weiterhin darauf, dieser Anteil liege immer noch bei 5% (Nullhypothese). Zur Sicherheit wurden 350 Bojen bestellt und getestet. Legen Sie für einen Signifikanztest mit einem Signifikanzniveau von 5% die Testgröße fest, geben Sie die Gegenhypothese an und bestimmen Sie den maximalen Ablehnungsbereich der Nullhypothese. Verwenden Sie die Normalverteilung als Näherung.

Testgröße: X: Anzahl der wellengeschädigten Bojen unter $n := 350$. $p_0 := p_0$ $p := 0.05$

Nullhypothese H_0: $p_0 \leq p \rightarrow p_0 \leq 0.05$

Gegenhypothese H_1: $p_1 > p \rightarrow p_1 > 0.05$

Annahmebereich: $A = \{ 0, 1, 2, ..., k \}$

Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{ k + 1, k + 2, ..., 500 \}$

Erwartungswert: $\mu := n \cdot p = 17.5$

Standardabweichung: $\sigma := \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 4.077$

$$P(\overline{A}) \leq 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \geq k + 1) \leq 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X \leq k) \leq 0.05$$

$$\Leftrightarrow \quad P(X \leq k) \geq 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{k - \mu + 0.5}{\sigma}\right) \geq 0.95$$

TW $\quad \dfrac{k - \mu + 0.5}{\sigma} \geq 1.645 \qquad k \geq 1.645 \cdot \sigma + \mu - 0.5$ **Gleitkommazahl, 5** $\rightarrow k \geq 23.707$

$k_0 := 23.707$ aufrunden: $k := \text{ceil}(k_0) = 24$

$A = \{ 0, 1, 2, ..., 24 \}$ $\qquad \overline{A} = \{ 25, 26, ..., 350 \}$

Teilaufgabe 4
An der Regatta nehmen insgesamt 64 Segelschiffe teil, davon fünf aus Dänemark. In einem Einzelrennen segeln immer vier Schiffe gegeneinander. Die beiden Erstplatzierten kommen jeweils eine Runde weiter, die beiden anderen scheiden aus.

Teilaufgabe 4.1 (2 BE)
Ermitteln Sie, wie viele Einzelrennen notwendig sind, bis in dem letzten Einzelrennen die letzten vier verbliebenen Segelschiffe die ersten vier Plätze aussegeln.

$$\frac{64}{4} = 16$$

$$|\Omega| = 16 + 8 + 4 + 2 = 30$$

Teilaufgabe 4.2 (3 BE)
Berechnen Sie mit welcher Wahrscheinlichkeit vier der fünf dänischen Schiffe in der ersten Runde aufeinander treffen, wenn die Teilnehmer ausgelost werden.

$$P(E) = \frac{5}{64} \cdot \frac{4}{63} \cdot \frac{3}{62} \cdot \frac{2}{61} \cdot 16 = 0.0001259$$