Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2017

- **Mathematik 13 Technik - B II - Lösung**

Die Wahrscheinlichkeit, an einer belebten Straße in einer Stadt ein Auto zu beobachten, dessen Fahrer ein Mobiltelefon am Ohr hat, ist p.

Teilaufgabe 1 (5 BE)
Bestimmen Sie in Abhängigkeit von p bei 12 kontrollierten Autos die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
A: *Nur das vierte und das siebte Auto wird von einem Fahrer gelenkt, der ein Mobilfunktelefon am Ohr hat.*
B: *Die ersten fünf Autos werden von einem Fahrer gelenkt, der kein Mobiltelefon am Ohr hat, aber unter den 12 Fahrern sind genau zwei mit einem Mobiltelefon am Ohr.*

$$P(A) = (1-p)^3 \cdot p \cdot (1-p)^2 \cdot p \cdot (1-p)^5 = (1-p)^{10} \cdot p^2$$

$$P(B) = (1-p)^5 \cdot \binom{7}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^5 = 21 \cdot (1-p)^{10} \cdot p^2$$

Teilaufgabe 2 (5 BE)
Ermitteln Sie, wie groß p mindestens sein muss, wenn bei 12 kontrollierten Autos mit mehr als 90% Wahrscheinlichkeit mindestens ein Fahrer erwischt wird, der ein Mobiltelefon am Ohr hat.

$$P(X \geq 1) > 0.9 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X = 0) > 0.9 \quad \Leftrightarrow \quad P(X = 0) < 0.1$$

$$\binom{12}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{12} < 0.1 \quad \Leftrightarrow \quad (1-p)^{12} < 0.1 \qquad p := 1 - \sqrt[12]{0.1} = 0.175$$

p muss mehr als 0,175 betragen.

In den Teilaufgaben 3 bis 5 ist p = 0,2

Teilaufgabe 3.0
Bei einer Kontrolle werden so lange Autos beobachtet, bis eines entdeckt wird, dessen Fahrer ein Mibiltelefon am Ohr hat, höchstens aber 15 Autos.
Die Zufallsgröße Y gibt die Anzahl der bei diesem Vorgang kontrollierten Autos an.

Teilaufgabe 3.1 (3 BE)
Bestimmen Sie $P(Y = 8)$ und $P(Y = 15)$.

7 Personen

die 8. Person

$$P(Y = 8) = 0.8^7 \cdot 0.2 = 0.04194 \qquad P(Y = 15) = 0.8^{15} + 0.8^{14} \cdot 0.2 = 0.04398$$

Teilaufgabe 3.2 (2 BE)
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man mindestens 7 Autos überprüfen muss.

$$P(Y \geq 7) = 1 - P(Y \leq 6) = \blacksquare$$

$$\blacksquare = 1 - \left(0.8^0 \cdot 0.2 + 0.8^1 \cdot 0.2 + 0.8^2 \cdot 0.2 + 0.8^3 \cdot 0.2 + 0.8^4 \cdot 0.2 + 0.8^5 \cdot 0.2\right) = 0.26214$$

oder:

in den ersten sechs kontrollierten Autos wird eine Freisprechanlage benutzt.

$$P(Y \geq 7) = 0.8^6 = 0.26214$$

Teilaufgabe 4 (7 BE)
Es werden 300 vorbeifahrende Autos beobachtet. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Fahrer an, die ein Mobiltelefon am Ohr haben. Bestimmen Sie einen möglichst kleinen Bereich symmetrisch um den Erwartungswert von X, in dem die Zahl der Fahrer mit Mobiltelefon am Ohr mit mindestens 90% Wahrscheinlichkeit liegt.
Verwenden Sie die Normalverteilung als Näherung.

$$n := 300 \qquad p := 0.2 \qquad \mu := n \cdot p = 60 \qquad \sigma := \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 6.928$$

$$P(|X - \mu| \leq c) \geq 0.90 \qquad \Leftrightarrow \quad P(60 - c \leq X \leq 60 + c) \geq 0.90$$

$$\Phi\left(\frac{60 + c - 60 + 0.5}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{c + 0.5}{\sigma}\right)$$

Umgebungssatz: $2 \cdot \Phi\left(\frac{c + 0.5}{\sigma}\right) - 1 \geq 0.90 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{c + 0.5}{\sigma}\right) \geq \frac{1.95}{2} = 0.95$

$$c_0 := \frac{c + 0.5}{\sigma} = 1.645 \text{ auflösen}, c \rightarrow 10.896894313803211976$$

$$c_0 := \mathrm{ceil}(c_0) \qquad c_0 = 11$$

Intervall: $60 - c_0 \leq X \leq 60 + c_0 \rightarrow 49 \leq X \leq 71$

Teilaufgabe 5 (8 BE)
Ermitteln Sie, wie viele Autos mindestens beobachtet werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens 70 Fahrer mit Mobiltelefon am Ohr zu erwischen.

n unbekannt

$p := 0.2 \qquad \mu(n) := 0.2 \cdot n \qquad \sigma(n) := \sqrt{0.2 \cdot n \cdot 0.8} \qquad \sigma(n) = 0.4 \cdot \sqrt{n}$

$$P(X \geq 70) \geq 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X \leq 69) \geq 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \leq 69) \leq 0.05$$

$$\Phi\left(\frac{69 - 0.2 \cdot n + 0.5}{0.4 \cdot \sqrt{n}}\right) \leq 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{69 - 0.2 \cdot n + 0.5}{0.4 \cdot \sqrt{n}} \leq -1.645$$

$$\Leftrightarrow \quad 69 - 0.2 \cdot n + 0.5 \leq -1.645 \cdot 0.4 \cdot \sqrt{n}$$

Substitution: $z = \sqrt{n}$

$$0.2 \cdot z^2 - 0.658 \cdot z - 69.5 \geq 0 \; \left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, z \\ \text{Gleitkommazahl}, 5 \end{array} \right. \rightarrow -\infty < z \leq -17.069 \vee 20.359 \leq z < \infty$$

$n := 20.359^2 = 414.489$ Es müssten mindestens 415 Fahrer kontrolliert werden.

Teilaufgabe 6.0
Die Polizei will Kontrollen verstärken, wenn in ihrer Stadt die Wahrscheinlichkeit für einen Fahrer mit Mobiltlefon am Ohr mehr als 20% beträgt (Gegenhypothese). Dies soll durch eine Kontrolle von 500 vorbeifahrenden Autos mit einem Signifikanztestgetestet werden.
Verwenden Sie die Normalverteilung als Näherung.

Teilaufgabe 6.1 (7 BE)
Legen Sie fpr einen Signifikanztest mit einem Signifikanznivau von 5% die Testgröße fest, geben Sie die Nukkhyotihese an und bestimmen Sie den maximalen Ablehungsbereich der Nullhypothese.

Testgröße: X: Anzahl der Fahrer, die keine Freisprechanlage nutzen unter $n_0 := 500$ $p_0 := 0.2$

.

Nullhypothese H_0: $p_0 \le p \rightarrow 1$

Gegenhypothese H_1: $p_1 > p \rightarrow p_1 > 0.2$

Annahmebereich: $A = \{\ 0, 1, 2, ..., k\}$

Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{\ k+1, k+2, ..., 500\ \}$

Erwartungswert: $\mu := n_0 \cdot p_0 = 100$

Standardabweichung: $\sigma := \sqrt{n_0 \cdot p_0 \cdot (1 - p_0)} = 8.944$

$P(\overline{A}) \le 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \ge k+1) \le 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X \le k) \le 0.05$

$\Leftrightarrow \quad P(X \le k) \ge 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{k - \mu + 0.5}{\sigma}\right) \ge 0.95$

TW $\quad \frac{k - \mu + 0.5}{\sigma} \ge 1.645 \qquad k \ge 1.645 \cdot \sigma + \mu - 0.5$ **Gleitkommazahl, 5** $\rightarrow k \ge 114.21$

$k_0 := 114.21$ aufrunden: $k := \text{ceil}(k_0) = 115$

$A = \{\ 0, 1, 2, ..., 115\ \}$ $\qquad \overline{A} = \{\ 116, 26, ..., 500\ \}$

Teilaufgabe 6.2 (3 BE)
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art, wenn die Wahrscheinlichkeit für einen Fahrer mit Mobiltelefon am Ohr 25% beträg und die Nullhypothese ab 116 Fahren mit Mobiltelefon am Ohr abgelehnt wird.

$p_1 := 0.25 \qquad \mu_1 := 500 \cdot 0.25 = 125 \qquad \sigma_1 := \sqrt{500 \cdot 0.25 \cdot 0.75} = 9.682$

$$P(A) = P(X \le 115) = \Phi\left(\frac{115 - 125 + 0.5}{9.682}\right) = \Phi(-0.981) = 1 - \Phi(0.98) = 1 - 0.83646 = 0.164$$