Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2017

- **Mathematik 13 Nichttechnik - A I - Lösung**

Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = \dfrac{2\cdot(x+1)^2}{x^2-1}$ mit der maximalen Definitionsmenge $D_g \subset \mathbb{R}$.

Teilaufgabe 1.1 (7 BE)

Geben Sie D_g an, prüfen Sie g auf Nullstellen und folgern Sie daraus die Art der Definitionslücken. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte bei Annäherung an die Definitionslücken.

$x^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -1 \qquad x_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$

$(x+1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{12} = -1 \quad \Rightarrow$ keine Nullstelle

$x = 1$ Polstelle mit VZW

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2\cdot(x+1)^2}{(x+1)\cdot(x-1)} = \lim_{x \to 1^-} \frac{\overset{\overset{2}{\uparrow}}{2\cdot(x+1)}}{\underset{\underset{0^-}{\downarrow}}{x-1}} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2\cdot(x+1)^2}{(x+1)\cdot(x-1)} = \lim_{x \to 1^-} \frac{\overset{\overset{2}{\uparrow}}{2\cdot(x+1)}}{\underset{\underset{0^+}{\downarrow}}{x-1}} = \infty$$

$x = -1$ stetig behebbare Definitionslücke

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{2\cdot(x+1)^2}{(x+1)\cdot(x-1)} = \lim_{x \to -1^-} \frac{\overset{\overset{0}{\uparrow}}{2\cdot(x+1)}}{\underset{\underset{-2}{\downarrow}}{x-1}} = 0$$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{2\cdot(x+1)^2}{(x+1)\cdot(x-1)} = \lim_{x \to -1^-} \frac{\overset{\overset{0}{\uparrow}}{2\cdot(x+1)}}{\underset{\underset{-2}{\downarrow}}{x-1}} = 0$$

Teilaufgabe 1.2.0

Die Funktion f mit $f(x) = \frac{2\cdot(x+1)}{x-1}$ mit $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ist die stetige Fortsetzung der Funktion g (Nachweis nicht erforderlich). Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

Teilaufgabe 1.2.1 **(5 BE)**

Geben Sie Art und Gleichungen aller Asymptoten von G_f an und untersuchen Sie, ob sich der Graph der Funktion f für $x \to \infty$ der Asymptote von oben oder von unten nähert.

$x = 1$ senkrechte Asymptote mit VZW

$y = 2$ waagrechte Asymptote, da Grad des Zählers = Grad des Nenners

$$(2\cdot x + 2) \div (x-1) = 2 + \frac{4}{x-1}$$

$$-(2\cdot x - 2)$$

$$\overline{\qquad\qquad 4}$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(2 + \frac{4}{x-1}\right) \to 2$$

Annäherung von oben, da $\frac{4}{x-1} > 0$ für $x > 1$

Teilaufgabe 1.2.2 **(4 BE)**

Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle von f und geben Sie die Wertemenge von f an.

[mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \frac{-4}{(x-1)^2}$]

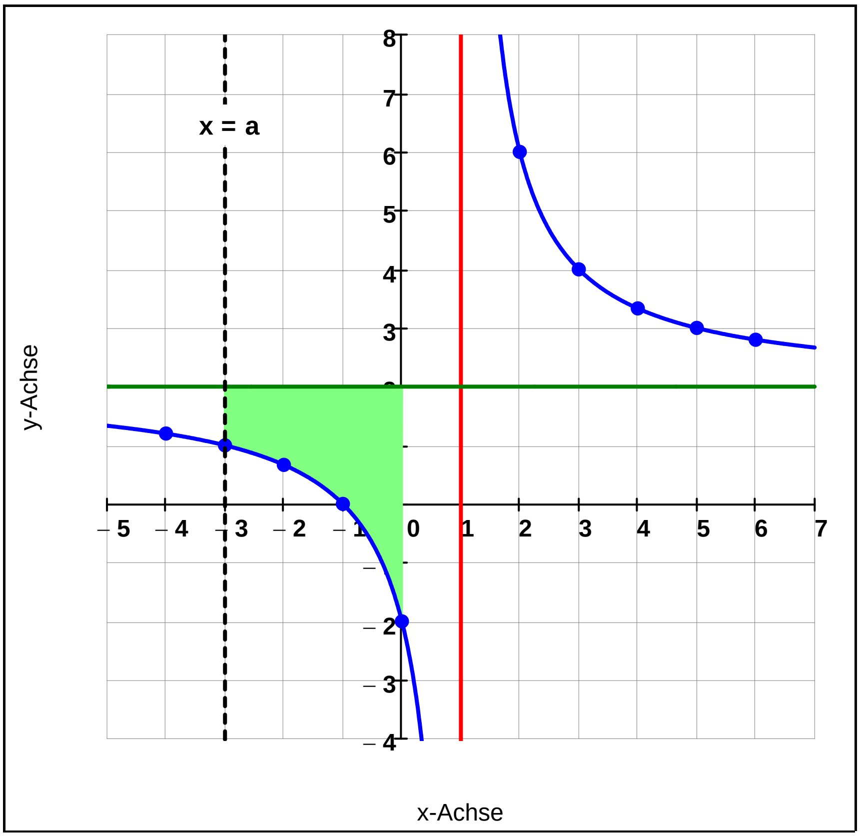
$$f'(x) = \frac{2\cdot(x-1) - 2\cdot(x+1)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2\cdot x - 2 - 2\cdot x - 2}{(x-1)^2} = \frac{-4}{(x-1)^2}$$

$f'(x) < 0$ für $x \in D_f$

G_f ist streng monoton fallend in $]-\infty; 1[$ und in $]1; \infty[$.

$W_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Teilaufgabe 1.2.3 **(4 BE)**
Zeichnen Sie G_f und seine Asymptoten unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse für $-4 \le x \le 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem.



x_{d1} =	$f(x_{d1})$ =
-4	1.2
-3	1
-2	0.7
-1	0
0	-2

x_{d2} =	$f(x_{d2})$ =
2	6
3	4
4	3.3
5	3
6	2.8

Teilaufgabe 1.2.4 **(5 BE)**
Der Graph G_f, die y-Achse und die Geraden $y = 2$ und $x = a$ mit dem reellen Parameter $a < -1$ begrenzen ein Flächenstück A.
Kennzeichnen Sie diese Fläche für $a = -3$ im Koordinatensystem von Teilaufgabe 1.2.3 und berechnen Sie deren Flächenmaßzahl **A(a)** in Abhängigkeit von a.
[mögliches Ergebnis: $A(a) = 4 \cdot \ln(1 - a)$]

$$A(a) = \int_a^0 (2 - f(x))\,dx = \int_a^0 \frac{-4}{x-1}\,dx$$

Stammfunktion: $$\int \frac{-4}{x-1}\,dx = -4 \cdot \ln(|x-1|)$$

$$A(a) = -4 \cdot \ln(|0-1|) + 4 \cdot \ln(|a-1|) = 4 \cdot \ln(1-a) \qquad \text{da } a < -1$$

Teilaufgabe 1.2.5 (2 BE)
Untersuchen Sie, ob $A(a)$ für $a \to \infty$ einen endlichen Wert annimmt.

$$\lim_{a \to \infty} \underset{\substack{\downarrow \\ \infty}}{(4 \cdot \ln(1-a))} \to \infty$$

Es existiert kein endlicher Wert.

Teilaufgabe 1.2.6 (3 BE)
Die Funktion F ist eine Stammfunktion der Funktion f. Geben Sie nur mit den bisherigen Ergebnissen die maximalen Monotonieintervalle des Graphen der Funktion F für $x < 1$ an.

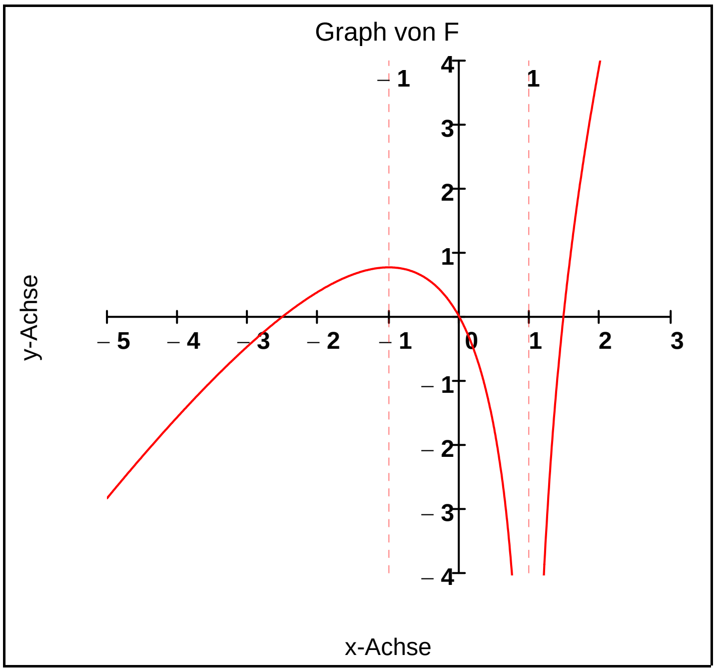
$$F'(x) = f(x) = \frac{2 \cdot (x+1)}{x-1}$$

$\frac{2 \cdot (x+1)}{x-1} > 0$ für $x < -1$ $\Rightarrow$ G_F ist streng monoton steigend in $]-\infty; -1]$

$\frac{2 \cdot (x+1)}{x-1} < 0$ für $-1 < x < 1$ $\Rightarrow$ G_F ist streng monoton fallend in $[-1; 1[$

Graphische Veranschaulichung (nicht in der Prüfung)

$$F(x) := 2 \cdot x + 4 \cdot \ln(|x-1|)$$



Teilaufgabe 2.0
Die Funktion n beschreibt näherungsweise die zeitliche Entwicklung der Einwohnerzahl einer fränkischen Kleinstadt. Es gilt hierfür die Funktionsgleichung $n(t) = b\cdot\left(-e^{-0.05\cdot t} + e^{-0.25\cdot t} + 1.5\right)$ mit $t \geq 0$, $b \in IR$.
Der Zeitpunkt t = 0 wird auf den 1.1.1995 festgelegt. Dabei gibt n die Einwohnerzahl in Tausend und t die Zeit in Jahren an. Auf Einheiten soll bei den Rechnungen verzichtet werden. Runden Sie die Ergebnisse sinnvoll.

Teilaufgabe 2.1 (2 BE)
Am 1.1.1999 hatte die Stadt 20983 Einwohner. Bestimmen Sie damit den Wert des Parameters b.
[Ergebnis: $b = 20$]

$$n(t) = b\cdot\left(-e^{-0.05\cdot t} + e^{-0.25\cdot t} + 1.5\right)$$

$$n(4) = 20.983 \quad \Leftrightarrow \quad b\cdot\left(-e^{-0.05\cdot 4} + e^{-0.25\cdot 4} + 1.5\right) = 20.983$$

$$b := \frac{20.983}{\left(-e^{-0.2} + e^{-1} + 1.5\right)} \qquad b = 20 \quad \text{gerundet}$$

Teilaufgabe 2.2 (7 BE)
Berechnen Sie Art und Koordinaten des lokalen Extrempunktes des Graphen der Funktion n und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse im gegebenen Sachzusammenhang.
[mögliches Teilergebnis: $n'(t) = e^{-0.05\cdot t} - 5\cdot e^{-0.25\cdot t}$]

$$n(t) := 20\cdot\left(-e^{-0.05\cdot t} + e^{-0.25\cdot t} + 1.5\right)$$

$$n'(t) = 20\cdot\left(0.05\cdot e^{-0.05\cdot t} - 0.25\cdot e^{-0.25\cdot t}\right)$$

$$n'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0.05\cdot e^{-0.05\cdot t} - 0.25\cdot e^{-0.25\cdot t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 0.05\cdot e^{-0.05\cdot t}\cdot\left(1 - 5\cdot e^{-0.2\cdot t}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - 5\cdot e^{-0.2\cdot t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-0.2\cdot t} = \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow \quad t_1 := \frac{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}{-0.2} \qquad t_1 = 8.05 \quad \text{gerundet}$$

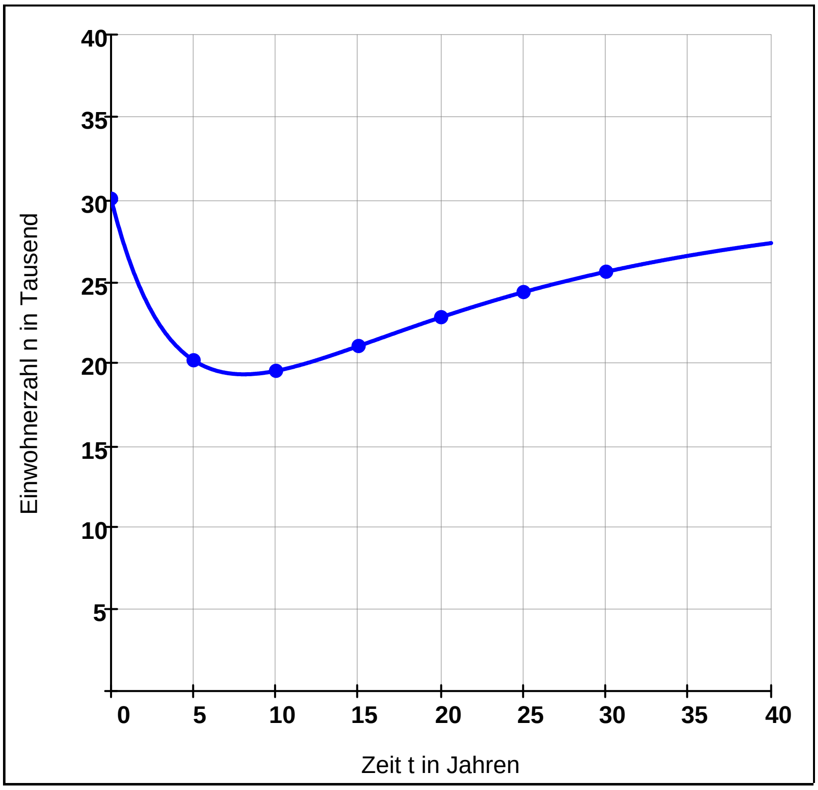
$$n''(t) := 20 \cdot \left(-0.0025 \cdot e^{-0.05 \cdot t} + 0.0625 \cdot e^{-0.25 \cdot t}\right)$$

$n''(t_1) = 0.134$ größer Null, also ein rel. Minimum

$n(t_1) = 19.3$ Tiefpunkt: **T(8.05 | 19.3)**

Nach etwa 8,05 Jahren, also zu Beginn des Jahres 2003, hat die Stadt mit 19300 Einwohnern die geringste Einwohnerzahl.

Teilaufgabe 2.3 **(4 BE)**
Zeichnen Sie den Graphen der Funktion n in ein geeignetes Koordinatensystem.



t1 =	n(t1) =
0	30
5	20
10	20
15	21
20	23
25	24
30	26

Teilaufgabe 2.4 (5 BE)
Zum 1.1.2010 konnte die Stadt Fördergelder beantragen. Diese richteten sich nach der durchschnittlichen Einwohnerzahl der Stadt während der vergangenen 15 Jahre. Ermitteln Sie die Höhe der Fördermittel, wenn es pro durchschnittlichem Einwohner 500 € an Fördergeldern gab, indem Sie zunächst das Integral $J = \int_0^{15} n(t)\,dt$ berechnen.

[Teilergebnis: $J \approx 317$]

Stammfunktion:

$$N(t) = \int 20\cdot\left(-e^{-0.05\cdot t} + e^{-0.25\cdot t} + 1.5\right) dt = \frac{20}{0.05}\cdot e^{-0.05\cdot t} - \frac{20}{0.25}\cdot e^{-0.25\cdot t} + 20\cdot 1.5\cdot t$$

$$N(t) := 400\cdot e^{-0.05\cdot t} - 80\cdot e^{-0.25\cdot t} + 30\cdot t$$

$$J = N(15) - N(0) = 637.065 - 320 = 317.065$$

Durchschnittliche Einwohnerzahl in 15 Jahren: $\frac{317.065}{15}\cdot 1000 = 21138$

Fördermittel: $21138\cdot 500\cdot € = 10569000\,€$

Teilaufgabe 3.0
Die subjektive Empfindung der Tonhöhe Z des menschlichen Gehörs in Abhängigkeit von der Frequenz x in Hertz (Hz) kann durch folgende Gleichung beschrieben werden:

$$Z(x) = \begin{cases} x & \text{if } 0 \le x \le 427 \\ 1127\cdot\ln\left(1 + \frac{x}{700}\right) - 110 & \text{if } 427 < x \le 19000 \end{cases}$$

Die Einheit der Tönhöhe Z ist 1 mel. Runden Sie die Ergebnisse auf ganze Zahlen.
Auf das Mitführen von Einheiten kann verzichtet werden.

Teilaufgabe 3.1 (5 BE)
Zeigen Sie, dass die Funktion Z an der Nahtstelle **x = 427** - im Rahmen der Rundungsgenauigkeit - stetig und differenzierbar ist.

$$Z(427) = 427$$

$$\lim_{x \to 427^+} \left(1127\cdot\ln\left(1 + \frac{x}{700}\right) - 110\right) = 1127\cdot\ln(161) - 2254\cdot\ln(10) - 110 = 426.716$$

Es gilt: $Z(427) = \lim_{x \to 427^+} \left(1127\cdot\ln\left(1 + \frac{x}{700}\right) - 110\right)$

$\Rightarrow$ Z ist stetig im Rahmen der Rundungsgenauigkeit

$$Z'(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \le x < 427 \\ \dfrac{1127}{\left(1 + \dfrac{x}{700}\right) \cdot 700} & \text{if } 427 < x \le 19000 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 427^-} 1 \rightarrow 1$$

$$\lim_{x \to 427^+} \frac{1127}{700 + x} \rightarrow 1$$

$\Rightarrow$ Z ist differenierbar.

Teilaufgabe 3.2 **(3 BE)**
Berechnen Sie die Frequenz x, bei der die Tonhöhe von 1400 mel empfunden wird.

$$Z(x) = 1400 \quad \Leftrightarrow \quad 1127 \cdot \ln\left(1 + \frac{x}{700}\right) - 110 = 1400$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln\left(1 + \frac{x}{700}\right) = \frac{1400 + 110}{1127}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + \frac{x}{700} = e^{\frac{1510}{1127}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_0 := \left(e^{\frac{1510}{1127}} - 1\right) \cdot 700 \cdot \text{Hz} \qquad x_0 = 1973\,\text{Hz}$$

Teilaufgabe 3.3 **(4 BE)**
Zeichnen Sie den Graphen der Funktion Z im Bereich $0 < x \le 2200$.
[Maßstab: waagrechte Achse: 1 cm entspricht 200 Hz
senkrechte Achse: 1 cm entspricht 200 mel]

$$Z(x) := \begin{cases} x & \text{if } 0 \le x \le 427 \\ 1127 \cdot \ln\left(1 + \frac{x}{700}\right) - 110 & \text{if } 427 < x \le 19000 \end{cases}$$

$x_d =$	$Z(x_d) =$
0	0
200	200
400	400
600	588
800	749
1000	890
1200	1015
1400	1128
1600	1231
1800	1325
2000	1411
2200	1492