# Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2017

- **Mathematik 13 Nichttechnik - A II - Lösung**

**Teilaufgabe 1.0**

Gegeben ist die reelle Funktion f mit $f(x) = \dfrac{2 \cdot x + 1}{x^3}$ mit der maximalen Definitionsmenge $D_f \subset IR$.

Ihr Graph wird mit $G_f$ bezeichnet.

**Teilaufgabe 1.1 (3 BE)**

Geben Sie $D_f$ und die Art der Definitionslücke von f an und bestimmen Sie die Nullstelle von f.

$D_f = IR \setminus \{ 0 \}$ x = 0 ist Polstelle mit VZW.

$2 \cdot x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \dfrac{-1}{2}$

**Teilaufgabe 1.2 (5 BE)**

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte an den Rändern von $D_f$ und geben Sie Art und Gleichungen aller Asymptoten von $G_f$ an.

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\overset{\overset{1}{\uparrow}}{2 \cdot x + 1}}{\underset{\underset{0-}{\downarrow}}{x^3}} \to -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{\overset{\overset{1}{\uparrow}}{2 \cdot x + 1}}{\underset{\underset{0+}{\downarrow}}{x^3}} \to \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\overset{\overset{\infty}{\uparrow}}{2 \cdot x + 1}}{\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{x^3}} \overset{\text{L'Hop.}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\overset{\overset{1}{\uparrow}}{2}}{\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{2 \cdot x^2}} = 0$$

ebenso $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \frac{2 \cdot x + 1}{x^3} \to 0$

senkrechte Asymptote: $x = 0$

waagrechte Asymptote: $y = 0$

**Teilaufgabe 1.3 (7 BE)**
Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle von $G_f$ und bestimmen Sie Art und Koordinaten des Extrempunktes von $G_f$.

[ Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \frac{-4 \cdot x - 3}{x^4}$ ]

$$f'(x) = \frac{2 \cdot x^3 - (2 \cdot x + 1) \cdot 3 \cdot x^2}{x^6} = \frac{2 \cdot x^3 - 6 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2}{x^6} = \frac{-4 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2}{x^6} = \frac{-4 \cdot x - 3}{x^4}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -4 \cdot x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_e = \frac{-3}{4}$$

$x = \frac{-3}{4}$ $\qquad$ $x \neq 0$

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Zähler** | **pos** | **neg** | **neg** |
| **Nenner** | **pos** | **pos** | **pos** |
| **f '(x)** | **pos** | **neg** | **neg** |
| $G_f$ | **sms** | **smf** | **smf** |

Funktionswert des Extrempunktes:

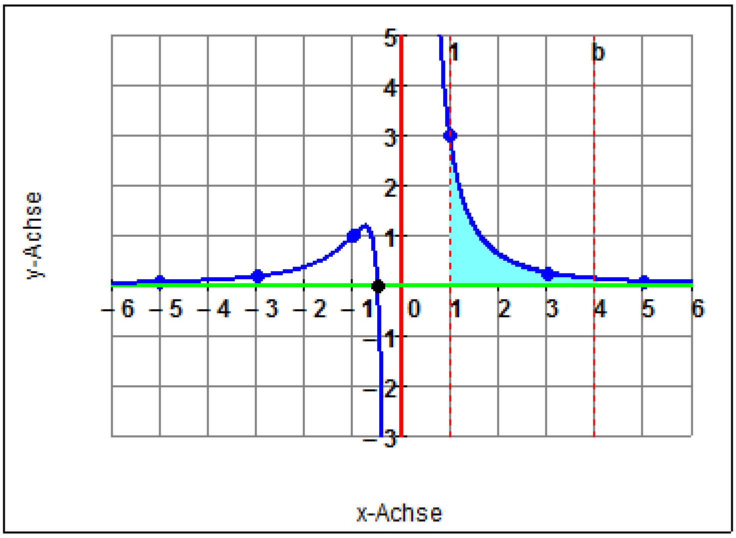
$$f\left(\frac{-3}{4}\right) = \frac{32}{27} = 1.185$$

Hochpunkt: $\quad H\left(\frac{-3}{4}, \frac{32}{27}\right)$

$G_f$ ist streng mon. steigend in $\left]-\infty ; \frac{-3}{4}\right]$,

$G_f$ ist streng mon. fallend in $\left[\frac{-3}{4} ; 0\right[$ und in $\left]0 ; \infty\right[$

**Teilaufgabe 1.4 (5 BE)**
Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und mittels geeigneter zusätzlicher Funktionswerte $G_f$ für $-5 \le x \le 5$ in ein kartesisches Kordinatensystem.




| xd = | f(xd) = |
|---|---|
| -5 | 0.1 |
| -3 | 0.2 |
| -1 | 1 |
| 1 | 3 |
| 3 | 0.3 |
| 5 | 0.1 |

**Teilaufgabe 1.5 (3 BE)**
Zeigen Sie, dass sich der Funktionsterm $f(x)$ auch durch $f(x) = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ darstellen lässt und bestimmen Sie eine Stammfunktion F der Funktion f mit $D_F = D_f$.

$$f(x) = \frac{2 \cdot x + 1}{x^3} = \frac{2 \cdot x}{x^3} + \frac{1}{x^3} = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}$$

$$F(x) = \frac{2}{-2+1} x^{-2+1} + \frac{1}{-3+1} \cdot x^{-3+1} + c = \frac{2}{-1} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + c = \frac{-2}{x} - \frac{0.5}{x^2} + c$$

**Teilaufgabe 1.6 (6 BE)**
Der Graph $G_f$, die Geraden $x = 1$, $x = b$ $(b > 1)$ und die x-Achse schließen ein Flächenstück ein.

Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück für $b = 4$ im Koordinatensystem der Teilaufgabe 1.4.

Zeigen Sie, dass sich für die Maßzahl des Flächeninhalts $A(b) = \frac{-2}{b} - \frac{0.5}{b^2} + 2.5$ ergibt.

Bestimmen Sie den Grenzwert von $A(b)$ für $b \to \infty$.

$$A(b) = \int_1^b f(x)\,dx = F(b) - F(1) = \left(\frac{-2}{b} - \frac{0.5}{b^2}\right) - \left(\frac{-2}{1} - \frac{0.5}{1^2}\right) = \frac{-2}{b} - \frac{0.5}{b^2} + 2.5$$

$$\lim_{b \to \infty} \left(\underset{\downarrow \atop 0}{\frac{-2}{b}} - \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{0.5}{b^2}} + 2.5\right) \to 2.5$$

**Teilaufgabe 2.0**
Zum Ende des Jahres 1995 (Zeitpunkt t = 0) lebten laut der Organisation der Vereinten Nationen (UNO) 5,74 Milliarden Menschen auf der Erde. Ende 2016 hatte die Erdbevölkerung gegenüber t = 0 um 29,1% zugenommen. Mit der vereinfachten Annahme einer exponentiellen Entwicklung gilt für die Gesamtzahl N der Weltbevölkerung in Milliarden in Abhängigkeitvon der Zeit t in Jahren die Gleichung $N(t) = a \cdot e^{b \cdot t}$ mit $t \geq 0$ und a, b $\in$ IR.
Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll.

**Teilaufgabe 2.1 (4 BE)**
Bestimmen Sie aus den obigen Angaben die Parameter a und b.
[ Ergebnisse: $a = 5.74$ ; b $\approx$ $0.01216$ ]

Anzahl der Jahre: $2016 - 1995 = 21$

Wert nach der Zunahme: $5.74 \cdot 1.291 = 7.41$

$N(0) = 5.74 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot e^{0} = 5.74 \quad \Leftrightarrow \quad a = 5.74$

$N(21) = 7.41 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot e^{b \cdot 21} = 7.41 \quad \Leftrightarrow$

a einsetzen: $5.74 \cdot e^{b \cdot 21} = 7.41 \quad \Leftrightarrow \quad b := \ln\left(\frac{7.41}{5.74}\right) \cdot \frac{1}{21} \qquad b = 0.01216$

**Teilaufgabe 2.2 (6 BE)**
Berechnen Sie, wieviele Menschen zum Ende des Jahres 2005 nach dem Modell von 2.0 auf der Erde lebten.
Vergleichen Sie das Ergebnis mit der tatsächlichen Weltbevölkerung Ende 2005 von 6,52 Milliarden (UNO), indem Sie die prozentuale Abweichung berechnen und bewerten Sie damit die Güte des Modells.
Geben Sie außerdem stichpunktartig drei Gründe an, die eine genaue Ermittlung der weltweiten Bevölkerungszahl erschweren.

$N(t) := 5.74 \cdot e^{0.01216 \cdot t}$

$N(10) = 6.482$ Milliarden

Vergleich: $\frac{6.52 - 6.482}{6.52} = 0.00583$

Der Wert nach dem Modell weicht nur 0,583% vom tatsächlichen Wert ab. Die Güte des Modells für diesen Zeitraum ist sehr gut.

Gründe für die Ungenauigkeit sind beispielsweise:
- Keine Meldepflicht für Geburten und Todesfälle
- Kriege
- Fehlende Verwaltung, Fluchtbewegungen aus Krisengebieten usw.

**Teilaufgabe 2.3** **(2 BE)**
Ermitteln Sie, um wie viele Menschen die Weltbevölkerung voraussichtlich im Jahr 2017 zunehmen wird.

$$2017 - 1995 = 22$$

$$N(22) - N(21) = 7.501 - 7.410 = 0.091$$

D. h. im Jahr 2017 nehmen die Menschen um etwa 91 Millionen zu.

**Teilaufgabe 2.4** **(4 BE)**
Bestimmen Sie die Gleichung der Ableitungsfunktion N ' und berechnen Sie N '(21).
Interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang und vergleichen Sie ihn mit Ihrem Ergebnis der Teilaufgabe 2.3.

$$N'(t) = 5.74 \cdot 0.01216 \cdot e^{0.01216 \cdot t} = 0.069798 \cdot e^{0.01216 \cdot t}$$

$$N'(21) = 0.090105$$

Die momentane jährliche Bevölkerungszunahme Ende 2016 beträgt etwa 90 Millionen.
Dies stimmt fast mit dem in 2.3 berechneten Wert überein.

**Teilaufgabe 2.5** **(3 BE)**
Bestimmen Sie das Jahr, in dem sich die Weltbevölkerung gegenüber dem 31.12.1995 nach dem Modell von 2.0 verdoppelt haben wird.

$$N(t) = 2\,N(0) \quad \Leftrightarrow \quad 5.74 \cdot e^{0.01216 \cdot t} = 2 \cdot 5.74 \quad \Leftrightarrow \quad e^{0.01216 \cdot t} = 2$$

$$t_0 := \frac{\ln(2)}{0.01216} \qquad t_0 = 57.00$$

Jahre, also Ende 2052.

**Teilaufgabe 2.6** **(3 BE)**
Berechnen Sie, welche Bevölkerungszahl sich am Ende des Jahres 2052 ergeben würde, wenn man - in einem anderen Szenario - ab Ende des Jahres 2016 von einer linearen Zunahme um 90 Millionen pro Jahr ausgeht.

Anzahl der Jahre: $2052 - 2016 = 36$

$$N_{linear} = N(21) + 36 \cdot 0.090 = 7.41 + 36 \cdot 0.090 = 10.65$$

Bevölkerungszahl Ende 2052: **10,65 Milliarden**

**Teilaufgabe 3.0**

Gegeben ist die Funktion k mit $k(x) = \dfrac{x^2}{4 \cdot \ln(2 \cdot x + 4)}$, ihre Ableitungsfunktion $k'$ und die Funktion h mit $h(x) = \dfrac{1}{k(x)}$ jeweils in ihren maximalen reellen Definitionsmengen.

**Teilaufgabe 3.1 (3 BE)**
Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Funktion k gilt: $D_k = ]-2 ; \infty[ \setminus \{-1.5\}$.

Argument von ln positiv: $2 \cdot x + 4 > 0$ auflösen, x $\rightarrow -2 < x$

Nennernullstelle: $2x + 4 = 1$ auflösen, x $\rightarrow -\frac{3}{2}$ also $x \neq -\frac{3}{2}$

**Teilaufgabe 3.2 (4 BE)**
Ordnen Sie jedem Graphen der Bilder a, b und c einer der Funktionen $k$, $k'$ oder h zu und begründen Sie Ihre Wahl.

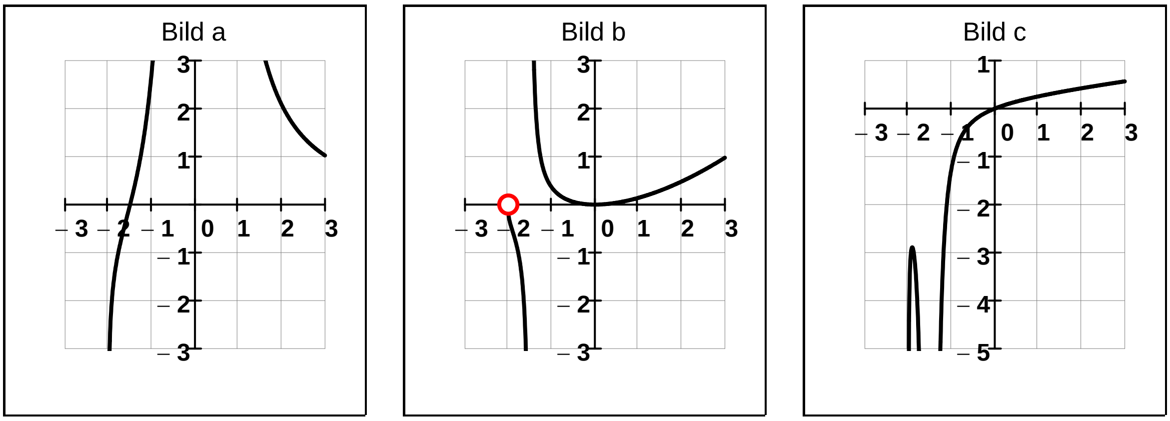



Bild b: gehört zum Graphen von k mit $k(x) = \dfrac{x^2}{4 \cdot \ln(2 \cdot x + 4)}$,
da doppelte Nullstelle bei x = 0 und Polstelle mit VZW an der Stelle x = - 1,5.

Bild c: gehört zum Grapehn von k ', da x = 0 Nullstelle mit VZW von Minus nach Plus,
d.h. x = 0 Extremstelle, (0|0) ist Tiefpunkt von k.

Bild a: gehört zum Graphen von h, da x = 0 Polstelle ohne VZW und x = - 1,5 Nullstelle ist.

**Teilaufgabe 3.3** **(2 BE)**
Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von $k(x)$ für $x \rightarrow \infty$.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\overset{\overset{\infty}{\uparrow}}{x^2}}{\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{4 \cdot \ln(2 \cdot x + 4)}} \overset{\text{L'Hosp.}}{=} \lim_{x \to \infty} \left( \frac{2 \cdot x}{\frac{4}{2 \cdot x + 4} \cdot 2} \right) = \lim_{x \to \infty} \left[ \frac{\overset{\overset{\infty}{\uparrow}}{x} \cdot (\overset{\overset{\infty}{\uparrow}}{2 \cdot x + 4})}{4} \right] \rightarrow \infty.$$