Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2017

- **Mathematik 13 Nichttechnik - B I - Lösung**

Teilaufgabe 1.0

Im $\mathbb{R}^3$ sind der Punkt $P(2\,|\,6\,|\,-8)$, die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und die Ebenen

E_a: $2 \cdot a \cdot x_1 + a \cdot x_2 - x_3 = 4 \cdot a$ mit a, $\mu \in \mathbb{R}$ gegeben.

Teilaufgabe 1.1 **(3 BE)**

Geben Sie für a = 0 die besondere Lage der Ebene E_0 im Koordinatensystem an.

Der Punkt P ' ist der an E_0 gespiegelte Punkt P. Geben Sie die Koordinaten des Spiegelpunktes P ' an.

E_0: $x_3 = 0$ ist die x_1-x_2-Ebene.

Hilfsgerade h senkrecht zu E_0 durch den Punkt P:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$h \cap E_0$: $-8 + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 8$

Ortsvektor des Schnittpunktes: $\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ortsvektor des Spiegelpunktes: $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

Koordinaten des Spiegelpunktes: **P'(2 | 6 | 8)**

Teilaufgabe 1.2 **(5 BE)**

Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebenen E_a und der Geraden g in Abhängigkeit von a.

$g \cap E_a$:

$$\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \mu - 1 \\ 2 \cdot \mu + 2 \\ -3 \cdot \mu - 3 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot a \cdot (2 \cdot \mu - 1) + a \cdot (2 \cdot \mu + 2) - (-3 \cdot \mu - 3) = 4 \cdot a$$

$\Leftrightarrow \quad 4 \cdot a \cdot \mu - 2 \cdot a + 2 \cdot a \cdot \mu + 2 \cdot a + 3 \cdot \mu + 3 = 4 \cdot a$

$\Leftrightarrow \quad 6 \cdot a \cdot \mu + 3 \cdot \mu = 4 \cdot a - 3$

$\Leftrightarrow \quad \mu \cdot (6 \cdot a + 3) = 4 \cdot a - 3$

$\Leftrightarrow \quad \mu = \frac{4 \cdot a - 3}{6 \cdot a + 3}$ falls $6 \cdot a + 3 \neq 0$ also $a \neq \frac{-1}{2}$

$a \neq \frac{-1}{2}$ genau ein Schnittpunkt

$a = \frac{-1}{2}$ $\quad 0 = -5$ Widerspruch $\Rightarrow$ kein Schnittpunkt, g und E_0 sind echt parallel

Teilaufgabe 1.3 **(5 BE)**
Die Ebene F enthält den Punkt P und die Gerade g. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von F.
[Mögliches Ergebnis: $\mathbf{F: \ 2 \cdot x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 = -6}$]

Ebene F: $\vec{x} = \overrightarrow{OX} + \sigma \cdot \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} \right]$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \lambda, \sigma \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & x_1 + 1 \\ 2 & -4 & x_2 - 2 \\ -3 & 5 & x_3 + 3 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow[2 \cdot (III) + 3 \cdot (I)]{(II) - (I)} \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & x_1 + 1 \\ 0 & -1 & x_2 - x_1 - 3 \\ 0 & 1 & 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_3 + 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(III) + (II)]{} \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & x_1 + 1 \\ 0 & -1 & x_2 - x_1 - 3 \\ 0 & 0 & 2 \cdot x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 + 6 \end{pmatrix}$$

Ebene F: $\quad 2 \cdot x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 + 6 = 0$

Teilaufgabe 1.4 (5 BE)
Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebenen E_a und F in Abhängigkeit von a.

$F \cap E_a$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -6 \\ 2\cdot a & a & -1 & 4\cdot a \end{pmatrix} \xrightarrow[(II)-a\cdot(I)]{} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -1-2\cdot a & 10\cdot a \end{pmatrix}$$

1. Fall: $-1-2\cdot a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{-1}{2}$ folgt $0 = -5$ Widerspruch

D.h. die Ebenen schneiden sich nicht, E und F sind echt parallel.

2. Fall: $a \neq \frac{-1}{2}$ Die Ebenen schneiden sich.

Teilaufgabe 1.5 (4 BE)
Bestimmen Sie für a = 1 die Gleichung der Schnittgeraden s der beiden Ebenen E_1 und F.

$F \cap E_1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[(II)-(I)]{} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 10 \end{pmatrix}$$

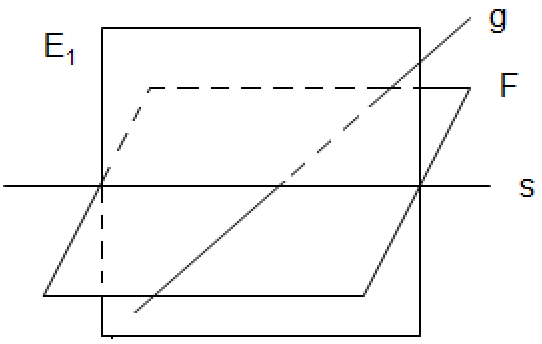
2. Zeile: $-3\cdot x_3 = 10 \quad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{-10}{3}$

Wähle: $x_2 = \tau$

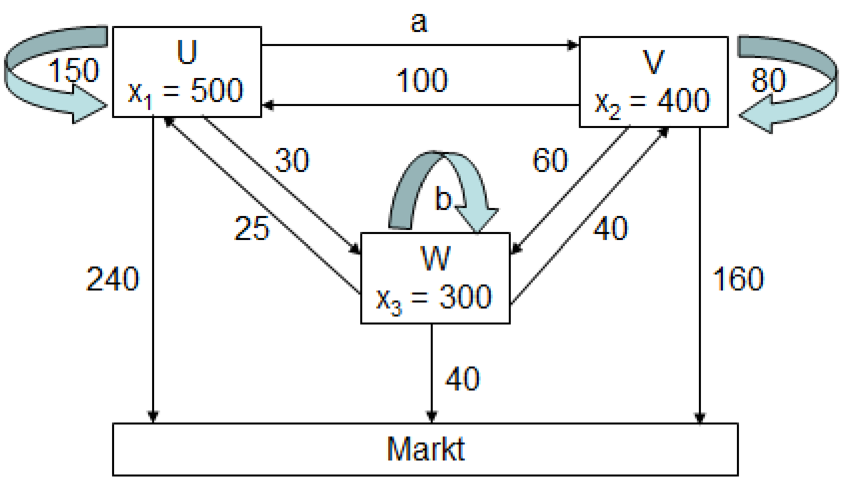
1. Zeile: $2\cdot x_1 + \tau + 2\cdot\left(\frac{-10}{3}\right) = -6 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{2}\cdot\left(-6 - \tau + \frac{20}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\tau$

Schnittgerade s: $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\tau \\ \tau \\ \frac{-10}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{-10}{3} \end{pmatrix} + \tau\cdot\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \tau \in IR$

Teilaufgabe 1.6 (3 BE)
Fertigen Sie eine aussagekräftige Skizze mit E_1, F und g an. Verwenden Sie dazu kein Koordinatensystem.



Teilaufgabe 2.0
Die drei Zweigwerke U, V und W eines Unternehmens sind nach dem Leontief-Modell miteinander und mit dem Markt wie im untenstehenden Diagramm dargestellt verflochten.
Alle Werte sind in Mengeneinheiten ME angegeben mit a, b $\in$ $\mathbb{R}^+$.



Teilaufgabe 2.1 (4 BE)
Bestimmen Sie a, b und die Inputmatrix A.

$a := 500 - 150 - 240 - 30$ $\qquad a = 80$

$b := 300 - 40 - 25 - 40$ $\qquad b = 195$

$$A := \begin{pmatrix} \frac{150}{500} & \frac{a}{400} & \frac{30}{300} \\ \frac{100}{500} & \frac{80}{400} & \frac{60}{300} \\ \frac{25}{500} & \frac{40}{400} & \frac{b}{300} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.05 & 0.1 & 0.65 \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe 2.2 (4 BE)
Die Produktionskosten pro ME betragen im Zweigwerk U 75,00 €, in V 80,00 € und in W 95,00 €. Der Erlös pro ME auf dem Markt beträgt für die Produkte von Zweigwerk U 215,00 €, von V 240,00 € und von W 170,00 €.
Berechnen Sie den Gesamtgewinn G und erläutern Sie, wie die Geschäftsleitung auf dieses Ergebnis reagieren könnte. (Hinweis: Gesamtgewinn = Gesamterlös - Gesamtkosten)

Kosten: $K := 500 \cdot 75 \cdot € + 400 \cdot 80 \cdot € + 300 \cdot 95 \cdot €$ $\qquad K = 98000 \cdot €$

Erlös: $E := 240 \cdot 215 \cdot € + 160 \cdot 240 \cdot € + 40 \cdot 170 \cdot €$ $\qquad E = 96800 \cdot €$

Gewinn: $G := E - K$ $\qquad G = -1200 \cdot €$

Um einen Gewin zu erzielen müssten die Produktionskosten gesenkt oder die Verkaufspreise erhöht werden.

Teilaufgabe 2.3 (7 BE)
Aufgrund einer technologischen Umstellung soll das Zweigwerk V genau 600 ME und U höchstens 580 ME produzieren. Untersuchen Sie, ob die Produktionen der Zweigwerke U und V so festgelegt werden können, dass dann alle drei Werke gleich viel an den Markt abgeben.

Produktionsvektor: Marktvektor:

$$\overrightarrow{x_{neu}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 600 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{y_{neu}} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{mit } x_1, x_3, y \in \mathbb{R}_0^+ \text{ und } x_1 \le 580.$$

$$\overrightarrow{y_{neu}} = (E - A) \cdot \overrightarrow{x_{neu}} \qquad E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E - A = \begin{pmatrix} 0.7 & -0.2 & -0.1 \\ -0.2 & 0.8 & -0.2 \\ -0.05 & -0.1 & 0.35 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y \\ y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & -0.2 & -0.1 \\ -0.2 & 0.8 & -0.2 \\ -0.05 & -0.1 & 0.35 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ 600 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Aufsellen des Gleichungssystems:

$y = 0.7 \cdot x_1 - 0.2 \cdot 600 - 0.1 \cdot x_3 \quad \Rightarrow \quad 0.7 \cdot x_1 - 0.1 \cdot x_3 - y = 120$

$y = -0.2 \cdot x_1 + 0.8 \cdot 600 - 0.2 \cdot x_3 \quad \Rightarrow \quad -0.2 \cdot x_1 - 0.2 \cdot x_3 - y = -480$

$y = -0.05 \cdot x_1 - 0.1 \cdot 600 + 0.35 \cdot x_3 \quad \Rightarrow \quad -0.05 \cdot x_1 + 0.35 \cdot x_3 - y = 60$

Lösung des Gleichungsystems:

$$\begin{pmatrix} 0.7 & -0.1 & -1 & 120 \\ -0.2 & -0.2 & -1 & -480 \\ -0.05 & 0.35 & -1 & 60 \end{pmatrix} \xrightarrow[0.7 \cdot (III) + 0.05 \cdot (I)]{0.7 \cdot (II) + 0.2 \cdot (I)} \begin{pmatrix} 0.7 & -0.1 & -1 & 120 \\ 0 & -0.16 & -0.9 & -312 \\ 0 & 0.24 & -0.75 & 48 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[0.16 \cdot (III) + 0.24 \cdot (II)]{} \begin{pmatrix} 0.7 & -0.1 & -1 & 120 \\ 0 & -0.16 & -0.9 & -312 \\ 0 & 0 & 0.336 & 67.2 \end{pmatrix}$$

3. Zeile: $0.336 \cdot y = -67.2$ $\qquad y := \dfrac{67.2}{0.336} = 200$ positiv

2. Zeile: $-0.16 \cdot x_3 - 0.9 \cdot 200 = -312$

$x_3 := (-312 + 0.9 \cdot 200) \cdot \dfrac{1}{(-0.16)}$ $\qquad x_3 = 825$ positiv

1. Zeile: $0.7 \cdot x_1 - 0.1 \cdot 825 - 1 \cdot 200 = 120$

$x_1 := (120 + 0.1 \cdot 825 + 200) \cdot \dfrac{1}{0.7}$ $\qquad x_1 = 575$ $\qquad 575 \le 580$

Das heißt eine Umstellung ist möglich.