Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2017

- **Mathematik 13 Nichttechnik - B II - Lösung**

Teilaufgabe 1.0

Im $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $A(2\,|\,2\,|\,2)$, $P(2\,|\,-3\,|\,5)$ und die Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

mit **a**, $\mu \in \mathbb{R}$ gegeben.

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Zeigen Sie, dass die beiden Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ der Ebene E zusammen mit dem Vektor $\overrightarrow{AP}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.
Begründen Sie, dass der Punkt P nicht Element der Ebene E ist.

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

zu zeigen:

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1) $2 \cdot \lambda_1 + 2 \cdot \lambda_2 = 0$

(2) $\lambda_2 - 5 \cdot \lambda_3 = 0$

(3) $3 \cdot \lambda_3 = 0$

Aus (3) $\lambda_3 = 0$

Aus (2) $\lambda_2 = 0$ Also sind die drei Vektoren linear unahängig, also eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

Aus (1) $\lambda_1 = 0$

$\overrightarrow{OP}$ in die Ebenengleichung einsetzen:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 2 &= 2 + 2 \cdot r + 2 \cdot s \\ -3 &= 2 + s \\ 5 &= 2 \end{aligned}$$

Widerspruch

Das heißt: $P \notin E$.

Teilaufgabe 1.2 (3 BE)
Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E und geben Sie die besondere Lage von E im Koordinatensystem an.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & x_1 - 2 \\ 0 & 1 & x_2 - 2 \\ 0 & 0 & x_3 - 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_3 - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_3 = 2$$

E ist echt parallel zur x_1-x_2-Ebene

Teilaufgabe 1.3 (3 BE)
Ermitteln Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s der Ebenen E und F: $x_1 + x_3 = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Wähle: $x_2 = \tau$

1. Zeile: $x_1 + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -2$

Schnittgerade s:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ \tau \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \tau \in \mathbb{R}.$$

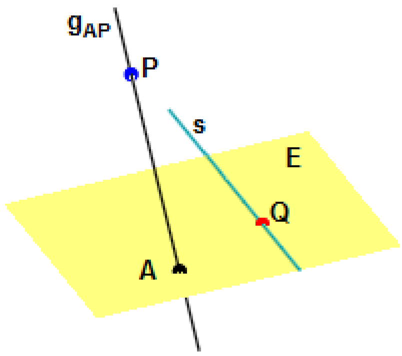
Teilaufgabe 1.4 (4 BE)
Zeigen Sie, dass $A \notin s$ gilt. Entscheiden Sie ohne weitere Rechnung, wie die Schnittgerade s zur Geraden AP liegt. Fertigen Sie hierzu eine aussagekräftige Skizze an.

$\overrightarrow{OA}$ in die Geradengleichung einsetzen:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Zeile: $2 = -2$ Widerspruch

Es gilt: $A \in E$, $P \notin E$, $s \subset E$



Die Geraden sind windschief zueinander.

Teilaufgabe 1.5 **(4 BE)**

Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geradenschar g_a: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2\cdot a \\ 2 \\ a \end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2\cdot a \end{pmatrix}$ mit a, $\mu \in \mathbb{R}$

und der Ebene E in Abhängigkeit von a.

g in E: $\quad a + \mu\cdot(-2\cdot a) = 2$

$\Leftrightarrow \quad -2\cdot a\cdot\mu = 2 - a \quad (*)$

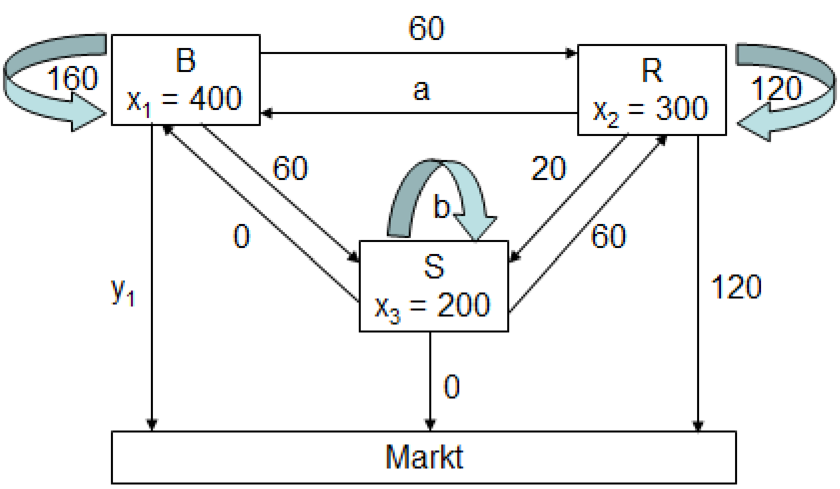
$\Leftrightarrow \quad \mu = \dfrac{2-a}{-2\cdot a} \quad$ falls $a \neq 0$

1. Fall: $\quad a = 0 \quad (*) \quad 0 = 2 \quad$ Widerspruch, keine Lösung, **g und E echt parallel.**

2. Fall: $\quad a \neq 0 \quad (*) \quad$ genau eine Lösung, **g schneidet E.**

Teilaufgabe 2.0

Drei konventionelle landwirtschaftliche Betriebe B, R und S sind untereinander und mit dem Markt nach dem Leontief-Modell verflochten. Das Diagramm stellt die momentane Verflechtung der Betriebe in Mengeneinheiten ME dar mit a, b, $y_1 \in \mathbb{R}^+$.



Teilaufgabe 2.1 (6 BE)
Bestimmen Sie a, b, y_1 und geben Sie deren Bedeutung im Sachzusammenhang an.
Berechnen Sie die Inputmatrix A.

$x_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13} + y_1$

$400 = 160 + 60 + 60 + y_1$

$y_1 := 400 - 160 - 60 - 60$ $\quad y_1 = 120$ $\quad$ Lieferung von B an den Markt.

$x_2 = x_{21} + x_{22} + x_{23} + y_2$

$300 = a + 120 + 20 + 120$

$a := 300 - 120 - 20 - 120$ $\quad a = 40$ $\quad$ Lieferung von R nach B.

$x_3 = x_{31} + x_{32} + x_{33} + y_3$

$200 = 0 + 60 + b + 0$

$b := 200 - 60$ $\quad b = 140$ $\quad$ Eigenbedarf von S.

Warenflussmatrix:

$$\begin{pmatrix} \text{Verflechtung} & B & R & S & \text{Markt} & \text{Produktion} \\ B & 160 & 60 & 60 & 120 & 400 \\ R & 40 & 120 & 20 & 120 & 300 \\ S & 0 & 60 & 140 & 0 & 200 \end{pmatrix}$$

Inputmatrix:

$$A := \begin{pmatrix} \frac{160}{400} & \frac{60}{300} & \frac{60}{200} \\ \frac{40}{400} & \frac{120}{300} & \frac{20}{200} \\ 0 & \frac{60}{300} & \frac{140}{200} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.4 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe 2.2 (7 BE)
In der nächsten Produktionsperiode wird erwartet, dass die Nachfrage von Produkten der Betriebe B auf 82 ME und R auf 84 ME sinkt. Betrieb S soll 10 ME an den Markt liefern.
Berechnen Sie den zugehörigen Produktionsvektor. Nennen Sie die Ursache dafür, dass trotz des Absinkens der Produktion in allen drei Bereichen die Marktabgabe in einem Betrieb steigt.

$$\vec{y} = (E - A)\cdot\vec{x}$$

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E - A = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.2 & -0.3 \\ -0.1 & 0.6 & -0.1 \\ 0 & -0.2 & 0.3 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 82 \\ 84 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem aufstellen:

$$\begin{pmatrix} 0.6 & -0.2 & -0.3 \\ -0.1 & 0.6 & -0.1 \\ 0 & -0.2 & 0.3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82 \\ 84 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Lösung des Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} 0.6 & -0.2 & -0.3 & 82 \\ -0.1 & 0.6 & -0.1 & 84 \\ 0 & -0.2 & 0.3 & 10 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{0.6\cdot(II) + 0.1\cdot(I)} \quad \begin{pmatrix} 0.6 & -0.2 & -0.3 & 82 \\ 0 & 0.34 & -0.09 & 58.6 \\ 0 & -0.2 & 0.3 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{0.34\cdot(III) + 0.2\cdot(II)} \quad \begin{pmatrix} 0.6 & -0.2 & -0.3 & 82 \\ 0 & 0.34 & -0.09 & 58.6 \\ 0 & 0 & 0.084 & 15.12 \end{pmatrix}$$

3. Zeile: $x_3 := \frac{15.12}{0.084} = 180$

2. Zeile: $x_2 := \frac{1}{0.34}\cdot(58.6 + 0.09\cdot 180)$ $\qquad x_2 = 220$

1. Zeile: $x_1 := \frac{1}{0.6}\cdot(82 + 0.2\cdot 220 + 0.3\cdot 180)$ $\qquad x_1 = 300$

Produktionsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 300 \\ 220 \\ 180 \end{pmatrix}$

Da die Betriebe B und R weniger produzieren, benötigen diese weniger ME des Betriebs S, der daher an den Markt liefern kann

Teilaufgabe 2.3 (8 BE)
Die Betriebe entschließen sich mittelfristig auf biologische Betriebsführung umzustellen.

Für die Umstellung egibt sich die neue Inputmatrix $A_{neu} = \begin{bmatrix} 0.4 & 2 + 0.004 \cdot t & 0.3 \\ 0.1 & 0.4 & 0.1 \\ 0 & 0.02 \cdot (t - 8) & 0.7 \end{bmatrix}$.

Dabei ist **t** $\in$ [16 ; 22] ein technologieabhängiger Parameter.
Berechnen Sie, für welchen Wert von t die Summe der Marktabgaben aller drei Betriebe am größten ist, wenn der Produktionsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 40 \cdot t \\ 10 \cdot t \\ 12 \cdot t \end{pmatrix}$ geplant ist.

Hinweis: Es kann davon ausgegangen werden, dass die Marktabgaben der drei Betriebe für **t** $\in$ [16 ; 22] nicht negativ sind.

$$\vec{y} = \left(E - A_{neu}\right) \cdot \vec{x}$$

$$A_{neu}(t) := \begin{bmatrix} 0.4 & 2 - 0.004 \cdot t & 0.3 \\ 0.1 & 0.4 & 0.1 \\ 0 & 0.02 \cdot (t - 8) & 0.7 \end{bmatrix} \qquad E - A_{neu}(t) = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.004 \cdot t - 2 & -0.3 \\ -0.1 & 0.6 & -0.1 \\ 0 & -0.02 \cdot t + 0.16 & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.004 \cdot t - 2 & -0.3 \\ -0.1 & 0.6 & -0.1 \\ 0 & -0.02 \cdot t + 0.16 & 0.3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \cdot t \\ 10 \cdot t \\ 12 \cdot t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.04 \cdot t^2 + 0.4 \cdot t \\ 0.8 \cdot t \\ 5.2 \cdot t - 0.2 \cdot t^2 \end{pmatrix}$$

Summe der Marktabgaben:

$$s(t) := \left(0.04 \cdot t^2 + 0.4 \cdot t\right) + 0.8 \cdot t + \left(5.2 \cdot t - 0.2 \cdot t^2\right)$$

$$s(t) = 6.4 \cdot t - 0.16 \cdot t^2$$

$$s'(t) := \frac{d}{dt} s(t) = -0.32 \cdot t + 6.4$$

$$s'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -0.32 \cdot t + 6.4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_0 := \frac{6.4}{0.32} \qquad t_0 = 20$$

Graph von s ist eine nach unten geöffnete Parabel:

Maximale Marktabgabe: $s_{max} := s\left(t_0\right) = 64$