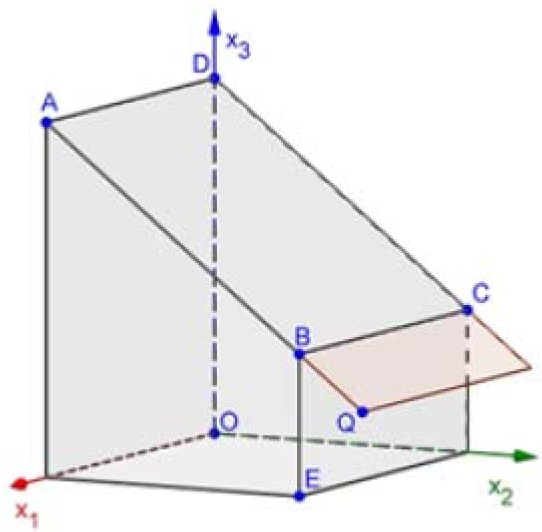
Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2017

- **Mathematik 12 Technik - B II - Lösung**

Teilaufgabe 1.0
Die Abbildung zeigt einen Wintergarten, dessen Boden in der x_1-x_2-Ebene eines kartesischen Koorindatensystems liegt.
Das rechteckige Glasdach ABCD ist von einer Markise bedeckt. Dabei wird der Abstand zwischen Glasdach und Markise vernachlässigt.

Die Ebene, in der die Markise liegt, wird mit M bezeichnet. Folgende Punkte des Wintergartens sind gegeben:
A(5 | 0 | 5), **B(5 | 4 | 2)**, **D(0 | 0 | 5)** und **E(5 | 4 | 0)**.
Alle Koordinaten sind in Metern angegeben.
Auf das Mitführen der Einheiten bei den Berechnungen kann verzichtet werden.



Teilaufgabe 1.1 (4 BE)
Die Markise lässt sich in Verlängerung des Glasdaches über die untere Dachkante **[BC]** um 1,25 m bis zum Punkt **Q** (siehe Skizze) ausfahren.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes **Q**. [Ergebnis: **Q(5 | 5 | 1,25)**]

Gegeben: $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{AB}\right| = 5 \qquad \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{5} \cdot \overrightarrow{AB} \cdot 1.25 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0.75 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BQ} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1.25 \end{pmatrix} \qquad Q\,(\,5\,|\,5\,|\,1.25\,)$$

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)
Geben Sie eine Gleichung der Ebene **M** in Parameterform an und formen Sie diese in eine Koordinatenform um.
[Mögliches Teilergebnis: **M:** $3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 - 20 = 0$]

Ebene M geht durch die Punkte A, B und D:

Parameterform von E:

$$\overrightarrow{x_E} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \left(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}\right) + \mu \cdot \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)$$

$$\overrightarrow{x_E} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right] + \mu \cdot \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right]$$

$$\overrightarrow{x_E} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor:

$$\overrightarrow{n_M} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -15 \\ -20 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor vereinfacht:

$$\overrightarrow{n_{M2}} = \frac{-1}{5} \cdot \overrightarrow{n_M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Normalenform von M:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right] = 0$$

Koordinatenform von M:

$$3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 - 20 = 0$$

Teilaufgabe 1.3 (4 BE)
Berechnen Sie das Volumen des Wintergartens in m^3.

Seitenfläche Trapez: $A = m \cdot h_1 = \frac{5 + 2}{2} \cdot 4 = 14$

Volumen des Prismas: $V = A \cdot h_2 = 14 \cdot 5 = 70$

Das Volumen beträgt 70 m^3.

Teilaufgabe 1.4 (6 BE)
Mithilfe zweier Drahtseile, die an den schrägen Dachstreben **[AB]** und **[DC]** befestigt werden, soll eine Leuchte im Wintergarten im Punkt **U(2,4 | 1,5 | 2,8)** aufgehängt werden.
Ermitteln Sie die Mindestlänge des Drahtseils, das an der Strebe befestigt wird, welche weiter von **U** entfernt ist.
Runden Sie das Ergebnis auf cm.

1. Lösungsmöglichkeit (offizielle Lösung, allerdings **sehr realitätsfremd**):
Es wird angenommen, dass **ein** Seil mit der Strebe einen rechten Winkel einschließt.

Aufgrund der Koordinatenwerte ist AB die weiter entfernte Strebe.

Strebe AB:

$$\overrightarrow{x_{AB}} = \overrightarrow{OA} + \sigma \cdot \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Allgemeiner Geradenpunkt X_{AB}:

$$\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \cdot \sigma \\ 5 - 3 \cdot \sigma \end{pmatrix}$$

Ortsvektor zu U:

$$\overrightarrow{OU} = \begin{pmatrix} 2.4 \\ 1.5 \\ 2.8 \end{pmatrix}$$

Lotfußpunkt: Verbindungsstrecke allgemeiner Geradenpunkt zu U steht senkrecht zur Strebe AB:

$$\left(\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OU}\right) \cdot \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \cdot \sigma \\ 5 - 3 \cdot \sigma \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2.4 \\ 1.5 \\ 2.8 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 16 \cdot \sigma - 6 - 6.6 + 9 \cdot \sigma = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 25 \cdot \sigma = 12.6 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_0 = \frac{12.6}{25} = 0.504$$

Ortsvektor Lotfußpunkt:

$$\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{x_{AB}}\left(\sigma_0\right) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + 0.504 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2.016 \\ 3.488 \end{pmatrix}$$

Verbindungsvektor:

$$\overrightarrow{UL} = \overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OU} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2.016 \\ 3.488 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2.4 \\ 1.5 \\ 2.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.6 \\ 0.516 \\ 0.688 \end{pmatrix}$$

Länge des Verbindungsvektors: $\left|\begin{pmatrix} 2.6 \\ 0.516 \\ 0.688 \end{pmatrix}\right| = 2.74$ in m

2. Lösungsmöglichkeit:
Die beiden Aufhängeseile bilden zusammen mit dem Aufhängepunkt U der Lampe eine Ebene, die senkrecht auf der Grundfläche steht. Sollen **beide** Seillängen möglichst kurz sein, so muss die Ebene parallel zur Hauswand sein. Jede Drehung dieser Ebene ergäbe längere Seillängen.

Schneidet man die Strebe AB mit dieser Hilfsebene und berechnet den Abstand zwischen Schnittpunkt L und Aufhängepunkt U der Lampe, hat man die gesuchte Mindestseillänge.

Die Strebe AB ist die weiter entfernte.

Ebene, parallel zur x_1x_3-Ebene durch U:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2.4 \\ 1.5 \\ 2.8 \end{pmatrix} \right] = 0$$

Allgemeiner Geradenpunkt der Strebe AB:

$$\overrightarrow{x_{AB}} = \overrightarrow{OA} + \sigma \cdot \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \right) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Schneide beide:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2.4 \\ 1.5 \\ 2.8 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4 \cdot \sigma - 1.5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_0 := 0.375$$

Ortsvektor Schnittpunkt:

$$\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + 0.375 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1.5 \\ 3.875 \end{pmatrix}$$

Verbindungsvektor:

$$\overrightarrow{UL} = \overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OU} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1.5 \\ 3.875 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2.4 \\ 1.5 \\ 2.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.6 \\ 0 \\ 1.075 \end{pmatrix}$$

Länge des Verbindungsvektors: $\left| \begin{pmatrix} 2.6 \\ 0 \\ 1.075 \end{pmatrix} \right| = 2.81$ in m

Teilaufgabe 1.5.0
Damit sich der Wintergarten bei Sonnenschein nicht zu stark aufheizt, ist die Markise jetzt bis zum Punkt **Q** ausgefahren.

Die Richtung der einfallenden Sonnenstrahlen wird durch den Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.8 \\ -1.4 \end{pmatrix}$ beschrieben.

Teilaufgabe 1.5.1 (4 BE)
Ohne Markise verliefe der Sonnenstrahl **s** durch den Punkt **E**. Geben Sie eine Gleichung für die Gerade **s** an und beechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts **T** von **s** mit der Markisenebene **M**.
[Ergebnis: **T(4 | 4,8 | 1,4)**

Gerade s der Sonnenstrahlen:

$$x_S = \overrightarrow{OE} + \tau \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -0.8 \\ -1.4 \end{pmatrix}$$

M: $3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 - 20 = 0$

s $\cap$ M: $3 \cdot (4 - 0.8 \cdot \tau) + 4 \cdot (-1.4 \cdot \tau) - 20 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -8 \cdot \tau - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tau_0 = -1$

Ortsvektor zum Schnittpunkt

$$\overrightarrow{OT} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -0.8 \\ -1.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4.8 \\ 1.4 \end{pmatrix}$$

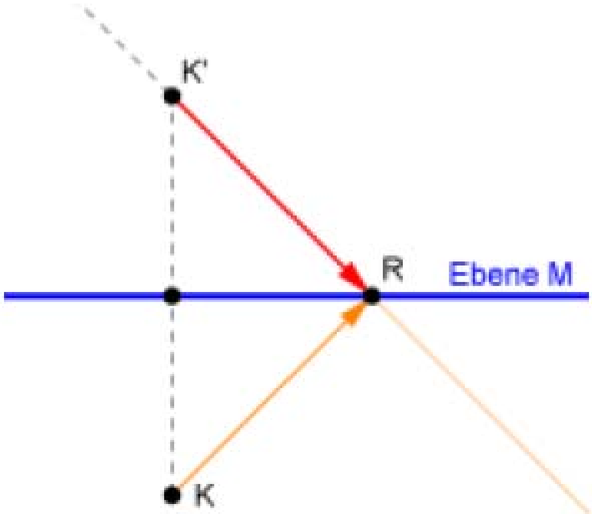
T(4 | 4,8 | 1,4)

Teilaufgabe 1.5.2 (2 BE)
Erläutern Sie ohne Rechnung, ob der Punkt E bei diesem Sonnenstand im Schatten der ausgefahrenen Markise liegt.

T(4 | 4,8 | 1,4) zum Vergleich: **Q(5 | 5 | 1,25)**

Die x_1- und x_2-Koordinaten von T sind beide positiv und kleiner als die x_1- und x_2-Koordinaten von Q.
T als Schnittpunkt liegt auf der Markise, damit liegt E im Schatten.

Teilaufgabe 1.6 (6 BE)
Im Punkt **K(2 | 0 | 0)** befindet sich eine Lichtquelle. Ihr Strahl wird am Glasdach des Wintergartens im Punkt **R(1 | 2 | 3,5)** reflektiert. Ermitteln Sie durch geeignete Spiegelung eine Gleichung der Geraden, die den reflektierten Lichtstrahl beschreibt.



Gegeben:

$$OK := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad OR := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OK} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3.5 \end{pmatrix}$$

Hilfsgerade h durch K senkrecht zu M:

$$x_h = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \rho \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

h ∩ M: $\quad 3\cdot(3\cdot\rho) + 4\cdot(4\cdot\rho) - 20 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 25\cdot\rho = 20 \quad \Leftrightarrow \quad \rho = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$

Ortsvektor Spiegelpunkt:

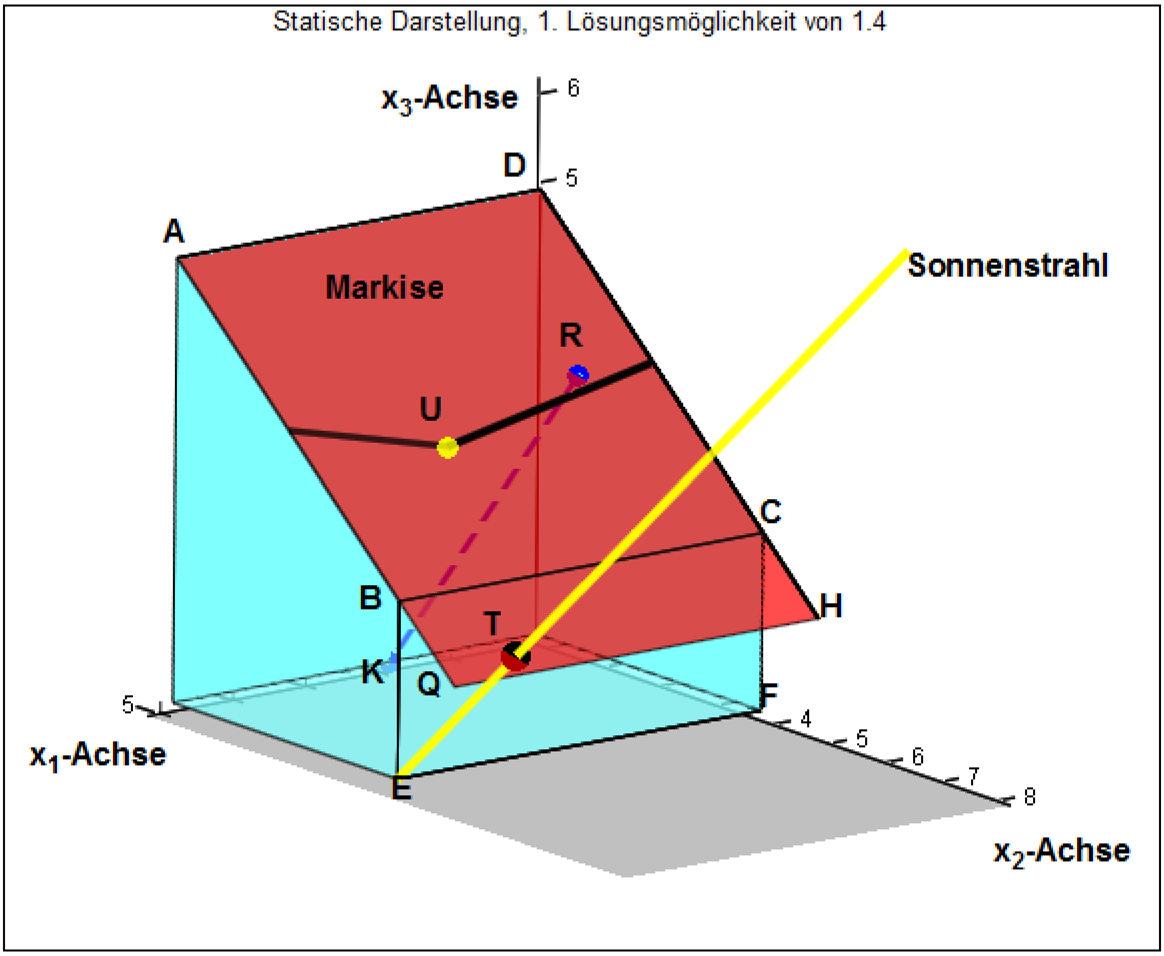
$$\overrightarrow{OK'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\frac{4}{5}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.4 \\ 3.2 \end{pmatrix}\right]$$

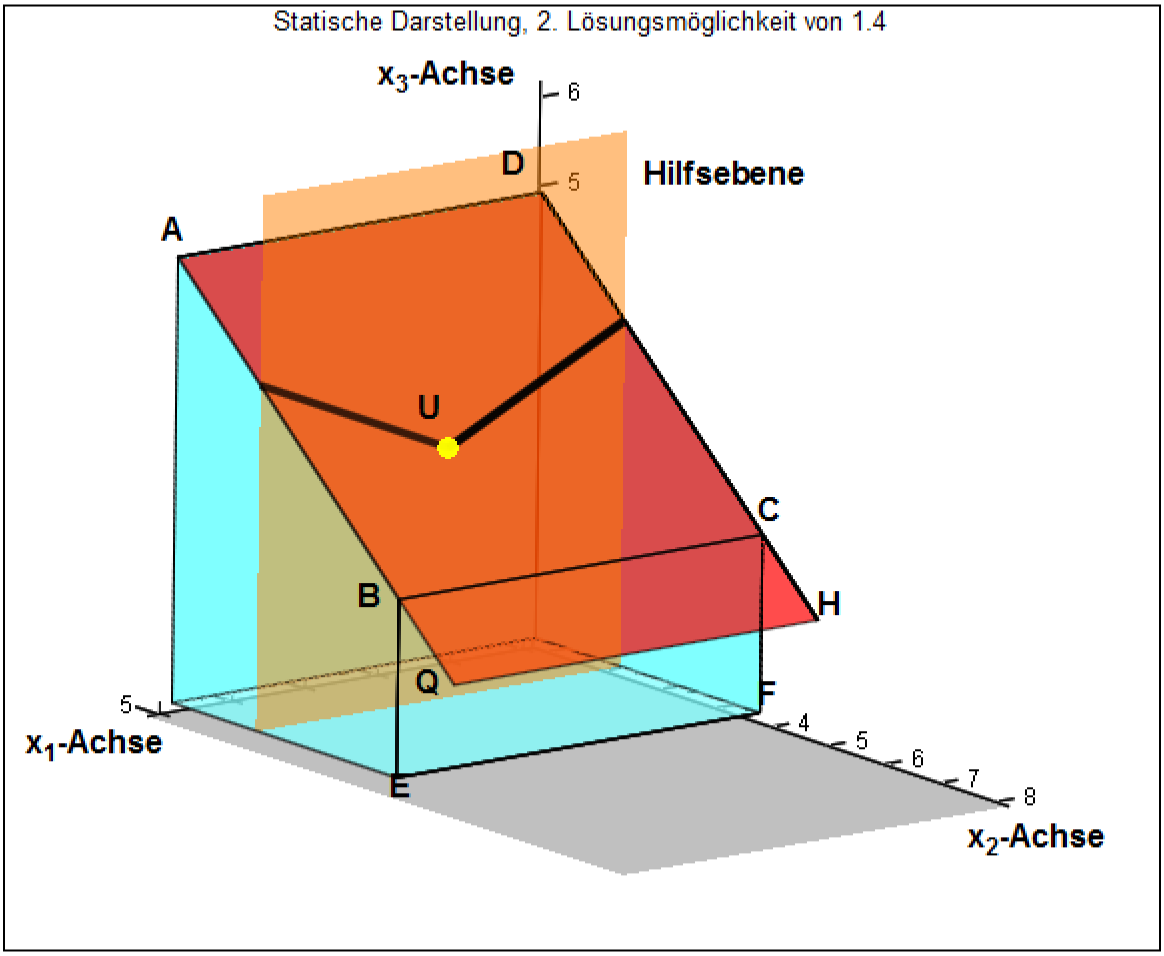
Reflektierter Strahl:

$$\vec{x_r} = \overrightarrow{OR} + \kappa\cdot\left(\overrightarrow{OK'} - \overrightarrow{OR}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3.5 \end{pmatrix} + \kappa\cdot\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 4.8 \\ 6.4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3.5 \end{pmatrix}\right]$$

$$\vec{x_r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3.5 \end{pmatrix} + \kappa\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2.8 \\ 2.9 \end{pmatrix}$$

Darstellung





Statische Darstellung, 2. Lösungsmöglichkeit von 1.4
x3-Achse
6
5
D
Hilfsebene
A
U
C
B
H
Q
F
5
x1-Achse
E
4
5
6
7
8
x2-Achse

Dynamische Darstellung, 2. Lösung von 1.4