Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2018

- **Mathematik 13 Technik - A I - Lösung**

made with mathcad

Teilaufgabe 1

Gegeben ist die Funktion f_a mit $f_a(x) = \dfrac{x \cdot e^{a \cdot x}}{(1 + a \cdot x)^2}$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ und der Definitionsmenge

$D_{f_a} = \mathbb{R} \setminus \{ -\frac{1}{a} \}$.

Teilaufgabe 1.1 **(8 BE)**
Geben Sie die Nullstelle von f_a an und bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f_a(x)$ an den Rändern der Definitionsmenge sowie die Gleichungen der achsenparallelen Asymptoten.

Nullstellen:

$$f_a(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot e^{a \cdot x} = 0 \quad \text{also:} \quad x_0 = 0 \quad \in D_{f_a}$$

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x \cdot e^{a \cdot x}}{(1 + a \cdot x)^2} = \lim_{x \to -\infty} \left[\underbrace{\frac{x}{(1 + a \cdot x)^2}}_{\downarrow\, 0} \cdot \underbrace{e^{a \cdot x}}_{\downarrow\, 0} \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{waagrechte Asymptote } y = 0$$

Nennerpotenz > Zählerpotenz

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\overset{\infty}{\overset{\uparrow}{x \cdot e^{a \cdot x}}}}{\underset{\infty}{\underset{\downarrow}{(1 + a \cdot x)^2}}} \overset{\text{L.Hosp.}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\left(e^{a \cdot x} + x \cdot a \cdot e^{a \cdot x}\right)}{2 \cdot (1 + a \cdot x) \cdot a} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^{a \cdot x} \cdot (1 + a \cdot x)}{2 \cdot (1 + a \cdot x) \cdot a}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(\frac{\overset{\infty}{\overset{\uparrow}{e^{a \cdot x}}}}{\underset{2 \cdot a > 0}{\underset{\downarrow}{2 \cdot a}}} \right) = \infty$$

Verhalten an der Nahtstelle:

$$\lim_{x \to -\frac{1}{a}^{-}} \underbrace{\left[\frac{\overbrace{-\frac{1}{a}\cdot e^{-1}}^{\text{Term} < 0}}{\underbrace{(1+a\cdot x)^2}_{0^+}}\right]}_{} = -\infty \qquad \Rightarrow \quad \text{senkrechte Asymptote } x = -\frac{1}{a}$$

$$\lim_{x \to -\frac{1}{a}^{+}} f_a(x) = -\infty$$

Begründung wie oben.

Teilaufgabe 1.2 **(6 BE)**

Ermitteln Sie das Monotonieverhalten des Graphen von f_a.

[Mögliches Teilergebnis: $f'_a(x) = \dfrac{e^{a\cdot x}\cdot\left(1+a^2\cdot x^2\right)}{(1+a\cdot x)^3}$

$$f'_a(x) = \frac{e^{a\cdot x}(1-a\cdot x)\cdot(1+a\cdot x)^2 - x\cdot e^{a\cdot x}\cdot 2\cdot(1+a\cdot x)\cdot a}{(1+a\cdot x)^4}$$

$$f'_a(x) = \frac{e^{a\cdot x}(1-a\cdot x)\cdot(1+a\cdot x) - x\cdot e^{a\cdot x}\cdot 2\cdot a}{(1+a\cdot x)^3}$$

$$f'_a(x) = \frac{1-a^2\cdot x^2 - 2\cdot a\cdot x}{(1+a\cdot x)^3}\cdot e^{a\cdot x}$$

$$f'_a(x) = \frac{(1-a\cdot x)^2}{(1+a\cdot x)^3}\cdot e^{a\cdot x}$$

Zähler: $(1-a\cdot x)^2\cdot e^{a\cdot x} > 0$

Vorzeichen des Nenners:

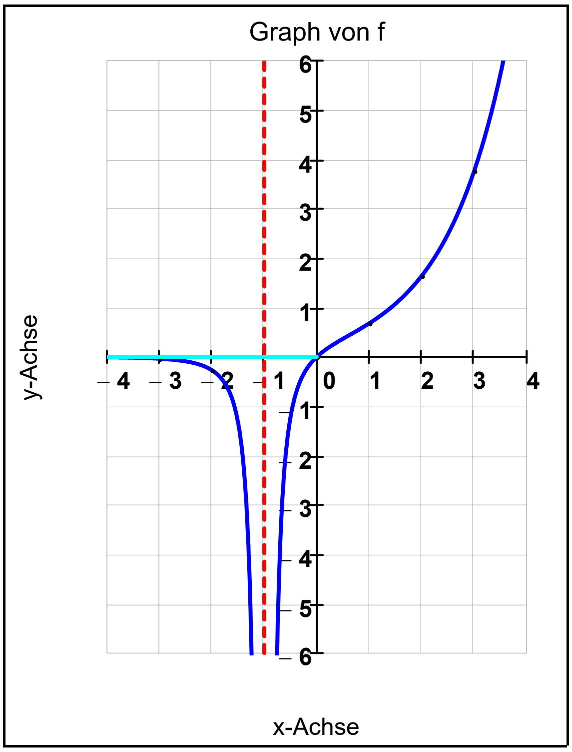
$1 + a \cdot x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > -\frac{1}{a} \quad \Leftrightarrow \quad f'_a(x) > 0$ für $x > -\frac{1}{a}$

$1 + a \cdot x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -\frac{1}{a} \quad \Leftrightarrow \quad f'_a(x) < 0$ für $x < -\frac{1}{a}$

G_{f_a} ist streng monoton fallend in $\left]-\infty\,;\,-\frac{1}{a}\right[$.

G_{f_a} ist streng monoton steigend in $\left]-\frac{1}{a}\,;\,\infty\right[$.

Teilaufgabe 1.3 **(4 BE)**
Zeichnen Sie für $a = 1$ den Graphen von f_1 für $-3 \le x \le 4$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse (1 LE = 1 cm). Tragen Sie auch die Asymptoten aus Aufgabe 1.1 ein.



$x_1 =$

-3
-2

$f(x_1, 1) =$

-0.037
-0.271

$f(-1.5, 1) = -1.3$

$x_2 =$

0
1
2
3
4

$f(x_2, 1) =$

0
0.68
1.642
3.766
8.736

$f(-0.5, 1) = -1.2$

Teilaufgabe 1.4 (7 BE)

Gegeben ist nun die Integralfunktion F durch $F(x) = \int_1^x f_1(t)\, dt$ mit der Definitionsmenge

$D_F =]-1;\infty[$.

Bestimmen Sie ohne weitere Rechnung das Monotonieverhalten und die Extremstelle des Graphen von F sowie sein Krümmungsverhalten. Ermitteln Sie die Anzahl und die ungefähre Lage der Nullstellen von f.

Monotonie: $F'(x) = f_1(x)$

$f_1(x) < 0$ für $x \in]-1;0[$, d.h. G_F ist streng monoton fallend in $]-1;0]$.

$f_1(x) > 0$ für $x \in]0;\infty[$, d.h. G_F ist streng monoton steigend in $[0;\infty[$.

$\Rightarrow$ G_F hat Tiefpunkt mit Abszisse $x = 0$

Krümmung: $F''(x) = f'_1(x)$

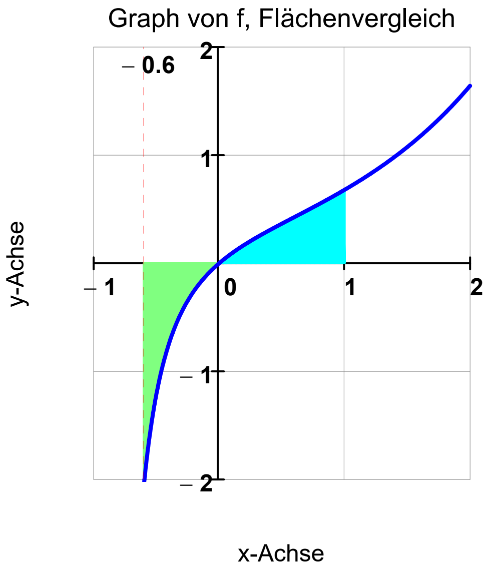
$f'_1(x) > 0$ für $x \in]-1;\infty[$, d.h. G_F ist linksgekrümmt

Nullstellen:

$F(1) = 0$ da $\int_1^1 f(t,1)\, dt = 0$ $x_1 = 1$ 1. Nullstelle

2. Nullstelle in $-1 < x < 0$:

Flächenvergleich an G_{f_1}: $\left| \int_{x_2}^0 f_1(t)\, dt \right| = \int_0^1 f_1(t)\, dt$



keine weiteren Nullstellen, da G_F streng monoton für $x < 0$ bzw. $x > 0$.

Teilaufgabe 1.5 (7 BE)
Die Gerade mit der Gleichung $x = -2$, die x-Achse und der Graph von f_1 begrenzen eine Fläche, die unendlich weit nach links reicht. Ermitteln Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieser Fläche.

Bestimmen Sie dazu $\int x \cdot e^x \cdot \frac{1}{(1+x)^2} \, dx$ mittels partieller Integration.

$$u(x) = x \cdot e^x \qquad u'(x) = e^x \cdot (1+x)$$

$$v'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \qquad v(x) = \frac{-1}{1+x}$$

$$J(x) = \int x \cdot e^x \cdot \frac{1}{(1+x)^2} \, dx = \frac{-x \cdot e^x}{1+x} - \int -\frac{e^x \cdot (1+x)}{1+x} \, dx = \frac{-x \cdot e^x}{1+x} + \int e^x \, dx$$

$$J(x) = \frac{-x \cdot e^x}{1+x} + e^x + \text{const}$$

$$-\left(\int_b^{-2} f_1(x) \, dx\right) = -(J(-2) - J(b)) = 2 \cdot e^{-2} - e^{-2} + \left(\frac{-b \cdot e^b}{1+b} + e^b\right) = e^{-2} - \frac{b \cdot e^b}{1+b} - e^b$$

$$\blacksquare = e^{-2} - \frac{(b+1)\cdot e^{b}}{1+b} = e^{-2} - e^{b}$$

$$A = \lim_{b \to -\infty} \left(e^{-2} - \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{e^{b}}\right) = e^{-2}$$

Teilaufgabe 2.0

Gegeben sind nun die Funktionen g und h durch die Gleichungen $g(x) = \arcsin\left(\frac{4\cdot x}{x^2+4}\right)$

und $h(x) = 2\cdot\arctan\left(\frac{1}{2}\cdot x\right) + \pi$ mit $x \in \mathrm{IR}$.

Teilaufgabe 2.1 **(10 BE)**
Bestimmen Sie das Symmetrieverhalten und das Monotonieverhalten sowie Art und Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von g.

[Mögliches Teilergebnis: $g'(x) = \frac{-4\cdot\left(x^2-4\right)}{\left|x^2-4\right|\cdot\left(x^2+4\right)}$

$$g(-x) = \arcsin\left[\frac{4\cdot(-x)}{(-x)^2+4}\right] = -\arcsin\left(\frac{4\cdot x}{x^2+4}\right) = -g(x) \qquad \Rightarrow \qquad G_g \text{ ist punktsymmetrisch}$$

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{4\cdot x}{x^2+4}\right)^2}} \cdot \frac{4\cdot\left(x^2+4\right) - 4\cdot x\cdot 2\cdot x}{\left(x^2+4\right)^2}$$

$$g'(x) = \frac{x^2+4}{\sqrt{\left(x^2+4\right)^2 - (4\cdot x)^2}} \cdot \frac{4\cdot x^2 + 16 - 8\cdot x^2}{\left(x^2+4\right)^2}$$

$$g'(x) = \frac{x^2+4}{\sqrt{x^4 + 8\cdot x^2 + 16 - 16\cdot x^2}} \cdot \frac{16 - 4\cdot x^2}{\left(x^2+4\right)^2}$$

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{\left(x^2-4\right)^2}} \cdot \frac{16-4\cdot x^2}{x^2+4} = \frac{1}{\left|x^2-4\right|} \cdot \frac{-4\left(x^2-4\right)}{x^2+4}$$

$x^2 - 4 > 0$ **auflösen**, $x \rightarrow 2 < x \vee x < -2$

$$g'(x) = \frac{1}{x^2-4} \cdot \frac{-4\left(x^2-4\right)}{x^2+4} = \frac{-4}{x^2+4} \qquad \Rightarrow \qquad g'(x) < 0$$

G_g ist streng monoton fallend in $]-\infty;\,-2]$ und in $[\,2;\,\infty[$.

$x^2 - 4 < 0$ **auflösen**, $x \rightarrow -2 < x < 2$

$$g'(x) = \frac{1}{-\left(x^2-4\right)} \cdot \frac{-4\left(x^2-4\right)}{x^2+4} = \frac{4}{x^2+4} \qquad \Rightarrow \qquad g'(x) > 0$$

G_g ist streng monoton steigend in $[\,-2;\,2\,]$.

Tiefpunkt an der Stelle $x_H = -2$ $\qquad g(-2) = -\frac{\pi}{2} \qquad TP\left(-2, -\frac{\pi}{2}\right)$

Hochpunkt an der Stelle $x_T = 2$ $\qquad g(2) = \frac{\pi}{2} \qquad HP\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$

Teilaufgabe 2.2 (4 BE)
Zeigen Sie, dass sich g(x) und h(x) für $|x| < 2$ nur um eine additive Konstante unterscheiden und bestimmen Sie diese.

$$h'(x) = 2\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{4}\cdot x^2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{4}{4+x^2}$$

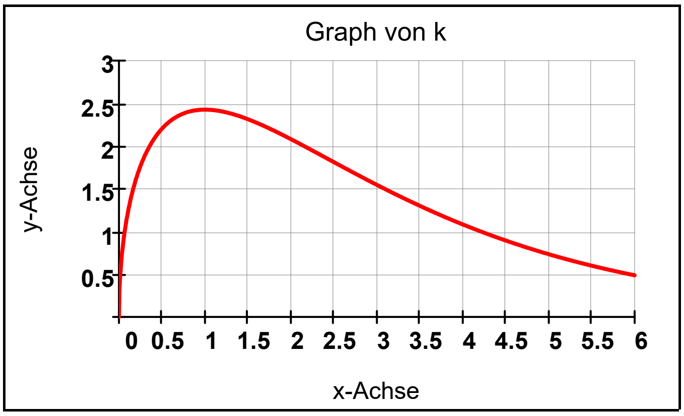
$$g'(x) = \frac{4}{x^2+4}$$

$\Rightarrow \qquad h'(x) = g'(x) \qquad \Rightarrow \qquad h(x) = g(x) + k$

weiter gilt: $\quad h(0) = \pi \quad$ und $\quad g(0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad k = \pi$

Teilaufgabe 3 (5 BE)

gegeben ist die Funktion k mit $k(x) = 4 \cdot \sqrt{x} \cdot e^{-0.5 \cdot x}$ mit der Definitionsmenge $D_k = IR_0^+$.
Ein Ausschnitt ihres Graphen G_k ist in der Abbildung unten zu sehen. Bei der Rotation des Graphen von k um die x-Achse entsteht ein unendlich ausgedehnter Drehkörper.
Berechnen Sie die Maßzahl seines Volumens.



$$V(b) = \pi \cdot \int_0^b k^2(x)\, dx = \pi \cdot \int_0^b 16 \cdot x \cdot e^{-x}\, dx$$

$u(x) = 16 \cdot x$ $\quad$ $u'(x) = 16$

$v'(x) = e^{-x}$ $\quad$ $v(x) = -e^{-x}$

$$\int 16 \cdot x \cdot e^{-x}\, dx = -16 \cdot x \cdot e^{-x} + \int 16 \cdot e^{-x}\, dx = -16 \cdot x \cdot e^{-x} - 16 \cdot e^{-x} + \text{const} = \blacksquare$$

$$\blacksquare = -16 \cdot e^{-x} \cdot (x + 1) + \text{const}$$

$$V(b) = \pi \cdot \left[-16 \cdot e^{-b} \cdot (b+1) - \left[-16 \cdot e^{0} \cdot (0+1)\right]\right] = \pi \cdot \left[-16 \cdot e^{-b} \cdot (b+1) + 16\right]$$

$$\lim_{b \to \infty} V(b) = \lim_{b \to \infty} \left[\pi \cdot \left[\frac{\overset{\infty}{\uparrow}}{}\!\!\frac{-16 \cdot (b+1)}{\underset{\downarrow}{\underset{\infty}{e^b}}} + 16\right]\right] \overset{\text{L. Hosp.}}{=} \lim_{b \to \infty} \left[\pi \cdot \left(\frac{-16}{\underset{\downarrow}{\underset{0}{e^b}}} + 16\right)\right] = 16 \cdot \pi$$

Die Maßzahl von V strebt gegen 16 π.

Teilaufgabe 4 (9 BE)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$-(x+3)\cdot y' + y = \frac{x-5}{x+3} \quad \text{für } x > -3$$

mit der Methode der Variation der Konstanten.
[Mögliches Teilergebnis: $y_h = D(x+3)$ mit $D \subset IR$]

Homogene DGL:

$$-(x+3)\cdot y' + y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' = \frac{y}{x+3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+3}\cdot y$$

Triviale Lösung: $y = 0$

Trennen der Variablen: $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+3}$

Integrieren: $\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1}{x+3}\,dx$

$$\ln(|y|) = \ln(|x+3|) = \ln(x+3) + c \qquad \text{da } x > -3$$

Delogarithmieren: $|y| = (x+3)\cdot e^c$

Betrag auflösen $y = K\cdot(x+3)$ wobei $K = e^c \vee K = -e^c \vee K = 0$

Allgemeine Lösung der homogenen DGL: $y_h(x) = K\cdot(x+3)$

Variation der Konstanten: $y_s(x) = K(x)\cdot(x+3)$

Ableitung: $y'_s(x) = K'(x)\cdot(x+3) + K(x)$

Einsetzen in inhomogene DGL:

$$-(x+3)\cdot[K'(x)\cdot(x+3) + K(x)] + K\cdot(x+3) = \frac{x-5}{x+3}$$

Vereinfachen: $-\left[K'(x)\cdot(x+3)^2\right] = \frac{x-5}{x+3}$

Auflösen nach K`(x): $K'(x) = -\frac{x-5}{(x+3)^3}$

Integration: $K(x) = \int -\frac{x-5}{(x+3)^3}\,dx$

Substitution $z = x + 3 \qquad x = z - 3 \qquad \frac{dz}{dx} = 1$

Einsetzen: $K(z) = \int -\frac{z-3-5}{z^3}\,dz = \int \frac{8-z}{z^3}\,dz = \int \left(\frac{8}{z^3} - \frac{1}{z^2}\right) dz$

$$K(z) = 8\cdot\frac{z^{-3+1}}{-3+1} - \frac{-1}{z} = \frac{-4}{z^2} + \frac{1}{z}$$

Resubstition: $K(x) = \frac{-4}{(x+3)^2} + \frac{1}{x+3}$

Einsetzen: $y_s(x) = \left[\frac{-4}{(x+3)^2} + \frac{1}{x+3}\right]\cdot(x+3) = \frac{-4}{(x+3)} + 1 = \frac{x+3-4}{x+3} = \frac{x-1}{x+3}$

Allgemeine Lösung: $y_{allg}(x) = K\cdot(x+3) + \frac{x-1}{x+3}$