Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2009
Mathematik 12 Nichttechnik - A II - Lösung

Teilaufgabe 1.0
Gegeben sind die reellen Funktionen

$f_k(x) = x\cdot\left(\frac{x^2}{k} - k - 1\right)$ mit $k \in \mathbb{R} \wedge k \neq 0$ und $ID_{f_a} = \mathbb{R}$.

Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_{f_k} bezeichnet.

Teilaufgabe 1.1 (8 BE)
Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f_k in Abhängigkeit von k. Geben Sie auch die zugehörigen Vielfachheiten an.

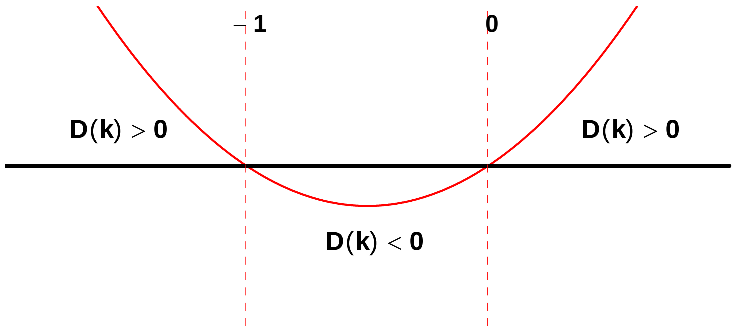
Funktionsterm: $f(x,k) := x\cdot\left(\frac{x^2}{k} - k - 1\right)$

Nullstellenbedingung: $x\cdot\left(\frac{x^2}{k} - k - 1\right) = 0$ $\qquad x_1 := 0$ $\qquad$ oder $\qquad \frac{x^2}{k} - k - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \qquad x^2 = k\cdot(k+1) \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \pm\sqrt{k\cdot(k+1)}$

Fallunterschiedung für den Wurzelterm:

$D(k) := k\cdot(k+1)$ $\qquad D(k) = 0 \rightarrow k\cdot(k+1) = 0$ **auflösen**, $k \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$



1. Fall: $-1 < k < 0$ $\qquad G_f$ besitzt eine einfache Nullstelle **(0/0)**

2. Fall: $k = -1$ $\qquad G_f$ besitzt eine dreifache Nullstelle **(0/0)**

3. Fall: $k < -1 \vee k > 0$ $\qquad G_f$ besitzt drei einfache Nullstellen **(0/0)** ,
$\left(\sqrt{k\cdot(k+1)}\ /\ 0\right)$ und $\left(-\sqrt{k\cdot(k+1)}\ /\ 0\right)$

Teilaufgabe 1.2 (2 BE)
Begründen Sie (z. B. mit Hilfe von Aufgabe 1.1), für welchen Wert k_0 der zugehörige Graph einen Terrassenpunkt besitzt.

Für $k_0 := -1$ besitzt der Graph eine dreifache Nullstelle (0/0), die Terrassenpunkt ist.

Teilaufgabe 1.3 (4 BE)
Bestimmen Sie die Werte von k so, dass der jeweils zugehörige Graph G_{f_k} durch den Punkt $P(-3/\ 3)$ geht.

$$f(-3, k) = 3 \rightarrow 3 \cdot k - \frac{27}{k} + 3 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 3 \cdot k^2 = 27 \text{ auflösen}, k \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe 2.0

Nun sei $k = 3$. Man erhält die Funktion f_3 mit $f_3(x) = \frac{x^3}{3} - 4 \cdot x$

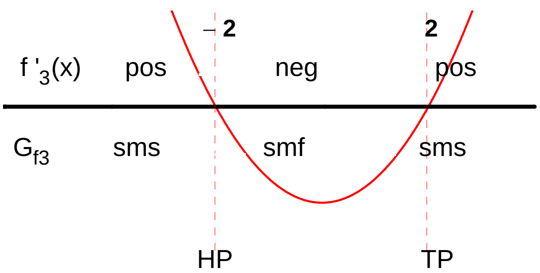
Teilaufgabe 2.1 (6 BE)
Ermitteln Sie die maximalen Intervalle, in denen die Funktion f_3 echt monoton zunimmt bzw. abnimmt. Bestimmen Sie Art und Koordinaten aller relativen Extrempunkte des Graphen.

Funktionsterm: $f_3(x) := \frac{x^3}{3} - 4 \cdot x$

Ableitung: $f'_3(x) := \frac{d}{dx} f_3(x) \rightarrow x^2 - 4$

Horizontale Tangenten: $f'_3(x) = 0 \rightarrow x^2 - 4 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$x_{E1} := -2 \qquad f_3(-2) \rightarrow \frac{16}{3} = 5.3 \qquad x_{E2} := 2 \qquad f_3(2) \rightarrow -\frac{16}{3} = -5.3$



Dabei bedeutet:
sms: streng monton steigend
smf: streng monoton fallend

$\boxed{HP\left(-2, \frac{16}{3}\right)}$ $\boxed{TP\left(2, -\frac{16}{3}\right)}$

Graph G_f ist streng monoton steigend in $]-\infty; -2]$ und in $[2; \infty[$;
Graph G_f ist streng monoton fallend in $[-2; 2]$

Teilaufgabe 2.2 (5 BE)
Berechnen Sie die x-Koordinate desjenigen Punktes, in dem der Graph G_{f_3} die kleinstmögliche Steigung besitzt.

Extremum von $f'_3(x)$ ist die Nullstelle von $f''_3(x)$.

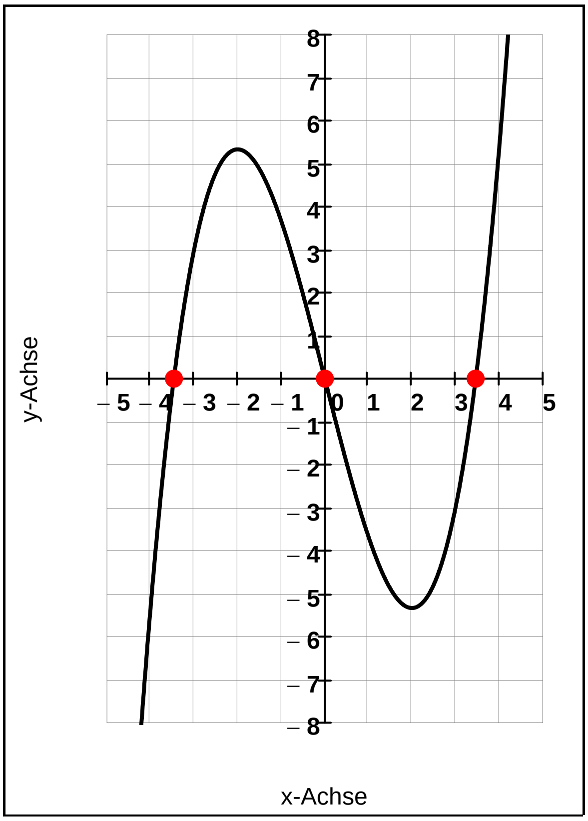
2. Ableitung $f''_3(x) := \frac{d}{dx} f'_3(x) \rightarrow 2 \cdot x$ $\qquad x_0 := f''_3(x) = 0 \rightarrow 2 \cdot x = 0$ auflösen, $x \rightarrow 0$

Extremum von $f'_3(x)$: $\quad x_0 = 0$

Da $f'_3(x) = x^2 - 4$ eine nach oben geöffnete Parabel ist, ist das Extremum $x_0 = 0$ ein absolutes Minimum.

Teilaufgabe 2.3 (5 BE)
Geben Sie die Nullstellen von f_3 an und zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion für $-4 \le x \le 4$ in ein Koordinatensystem.
Maßstab: **1 LE = 1 cm**

Nullstellen: $\quad x_N := f_3(x) = 0 \rightarrow \frac{x^3}{3} - 4 \cdot x = 0$ auflösen, $x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cdot \sqrt{3} \\ -2 \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix}$



$x_t =$	$f_3(x_t) =$
-4	-5.3
-3	3.0
-2	5.3
-1	3.7
0	0.0
1	-3.7
2	-5.3
3	-3.0
4	5.3

Teilaufgabe 2.4 (4 BE)

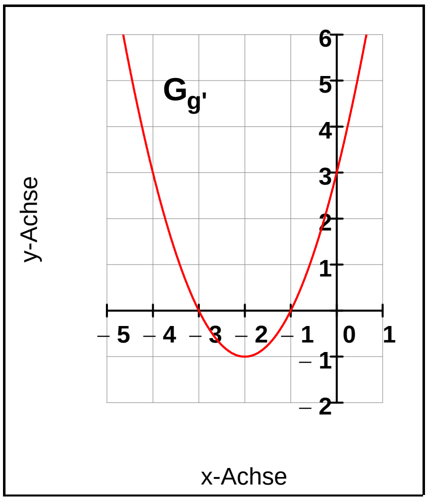
Der Graph G_{f_3} und die x-Achse schließen im IV. Quadranten ein Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhaltes.

Stammfunktion: $F_3(x) := \int f_3(x)\,dx \rightarrow \frac{x^4}{12} - 2 \cdot x^2$

Flächenberechnung: $A := -\int_0^{2 \cdot \sqrt{3}} f_3(x)\,dx$ $\quad$ $A = 12$

Teilaufgabe 3.0

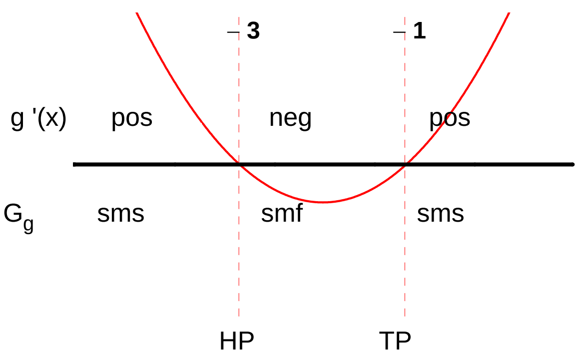
Untenstehende Zeichnung gibt den Graphen der Ableitungsfunktion **g'** einer ganzrationalen Funktion **g** dritten Grades an:



Teilaufgabe 3.1 (7 BE)

Begründen Sie anhand der Zeichnung, an welcher Stelle (Abszisse) der Graph der Funktion **g** einen Hochpunkt, an welcher Stelle er einen Tiefpunkt und an welcher Stelle er einen Wendepunkt besitzt.

Der Graph von **g'** besitzt die einfachen Nullstellen $x_1 := -3$ und $x_2 := -1$



An der Stelle $x_1 := -3$ Vorzeichenwechsel von Plus nach Minus
$\Rightarrow$ Hochpunkt von G_g

An der Stelle $x_2 := -1$ Vorzeichenwechsel von Minus nach Plus
$\Rightarrow$ Tiefpunkt von G_g

An der Stelle $x_3 := -2$ Extremum
$\Rightarrow$ Wendepunkt von G_g

Teilaufgabe 3.2 (7 BE)
Berechnen Sie mit Hilfe geeigneter aus der Zeichnung abgelesener Punktkoordinaten den Funktionsterm $g'(x)$ und anschließend den Funktionsterm $g(x)$ derjenigen Funktion g, deren Wendepunkt auf der x-Achse liegt.

Funktionsterm von $g'(x)$: $g'(x,a) := a\cdot(x+3)\cdot(x+1)$

Punkt $(-2/-1) \in G_{g'}$: $a := g'(-2,a) = -1 \rightarrow -a = -1$ auflösen, $a \rightarrow 1$

$g'(x,a) = (x+1)\cdot(x+3)$

Ausmulitplizieren: $g'(x,a) = x^2 + 4\cdot x + 3$

Integration: $g(x,c) := \int (x^2 + 4\cdot x + 3)\, dx + c \qquad g(x,c) \rightarrow \frac{x^3}{3} + 2\cdot x^2 + 3\cdot x + c$

Punkt $(-2/0) \in G_g$: $c := g(-2,c) = 0 \rightarrow c - \frac{2}{3} = 0$ auflösen, $c \rightarrow \frac{2}{3}$

Funktionsterm von g: $g(x,c) \rightarrow \frac{x^3}{3} + 2\cdot x^2 + 3\cdot x + \frac{2}{3}$

Teilaufgabe 4.0
Die Gebührenordnung des Paketdienstes "Paket Ahoi" enthält folgende Klausel:
"Bei Päckchen in Zylinderform darf die Summe aus der Höhe h des Zylinders und dem Durchmesser d des Grundkreises 100 cm nicht überschreiten."
Auf Einheiten wird im Folgenden verzichtet!

Teilaufgabe 4.1 (5 BE)
Berechnen Sie das Volumen V(d) eines solchen Päckchens, wenn die in der Gebührenordnung erwähnte Summe genau 100 cm beträgt. Geben Sie auch eine geeignete Definitionsmenge an.
[Mögliches Teilergebnis: $V(d) = \pi\cdot\left(25\cdot d^2 - \frac{1}{4}\cdot d^3\right)$

Zylindervolumen: $V = r^2\cdot\pi\cdot h = \left(\frac{d}{2}\right)^2\cdot\pi\cdot h$

Nebenbedingung: $h + d = 100$ auflösen, $h \rightarrow 100 - d$

Einsetzen: $V(d) := \frac{1}{4}\cdot d^2\cdot\pi\cdot(100-d) \qquad \Leftrightarrow \qquad V(d) = 25\cdot\pi\cdot d^2 - \frac{\pi\cdot d^3}{4}$

Definitionsmenge: $0 < d < 100$

Teilaufgabe 4.2 (7 BE)
Bestimmen Sie nun die Maße desjenigen zylinderförmigen Päckchens, das dabei maximales Volumen aufweist.

Ableitung: $V'(d) := \frac{d}{dd}V(d) \rightarrow 50\cdot\pi\cdot d - \frac{3\cdot\pi\cdot d^2}{4}$

Horizontale Tangenten: $d0 := V'(d) = 0 \text{ auflösen} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{200}{3} \end{pmatrix}$ nicht definiert / Lösung

Abrufen der Lösung: $d_0 := d0_1$ $\quad d_0 = 0 = 0$

Funktionswert: $V(d_0) = 0$

Vergleich mit den Randwerten: $\lim_{d \rightarrow 0^+} \left(25\cdot\pi\cdot d^2 - \frac{\pi\cdot d^3}{4}\right) \rightarrow 0$

$\lim_{d \rightarrow 100^-} \left(25\cdot\pi\cdot d^2 - \frac{\pi\cdot d^3}{4}\right) \rightarrow 0$

absolutes Maximum **(66.7 / 116355)**

Höhe des Päckchens: $h_0 := 100 - d_0$ $\quad h_0 = 100 = 100$