Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2009
Mathematik 12 Technik - A II - Lösung

Teilaufgabe 1.0

Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a(x) = \frac{2\cdot a\cdot x}{x^2 + a}$ mit $a \in IR \setminus \{0\}$ in der größtmöglichen, von a abhängigen Definitionsmenge $ID_a \subseteq IR$.

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Ermitteln Sie die Definitionsmenge ID_a sowie Anzahl und Art der Definitionslücken in Abhängigkeit von a.

Zähler: $z(x,a) := 2\cdot a\cdot x$

Nenner: $n(x,a) := x^2 + a$

Funktionsterm: $f(x,a) := \frac{z(x,a)}{n(x,a)}$ $\qquad f(x,a) = \frac{2\cdot a\cdot x}{x^2 + a}$

$n(x,a) = 0 \rightarrow x^2 + a = 0$ auflösen, $x \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{a}\cdot i \\ -\sqrt{a}\cdot i \end{pmatrix}$ negative Wurzeln!

Schreibweise in IR $\qquad x_1(a) := -\sqrt{-a} \qquad x_2(a) := \sqrt{-a}$

$a > 0$ keine Definitionslücken $\Rightarrow$ $ID = IR$

$a < 0$ zwei Polstellen mit VZW $\Rightarrow$ $ID = IR \setminus \{ -\sqrt{-a} ; \sqrt{-a} \}$

Teilaufgabe 1.2 (7 BE)

Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen von f_a und berechnen Sie $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f_a(x)$. Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen von f_a an.

$f(-x,a) \rightarrow -\frac{2\cdot a\cdot x}{x^2 + a} \qquad -f(x,a) \rightarrow -\frac{2\cdot a\cdot x}{x^2 + a} \qquad \Rightarrow \qquad f(-x,a) = -f(x-a)$

G_f punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\overset{\overset{-\infty}{\uparrow}}{2\cdot a\cdot x}}{\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{x^2 + a}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2\cdot a}{\underset{\underset{-\infty}{\downarrow}}{2\cdot x}} \right) \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\overset{\infty}{\overset{\uparrow}{2 \cdot a \cdot x}}}{\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{x^2 + a}} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2 \cdot a}{\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{2 \cdot x}} \right) \quad \to 0$$

Horizontale Asymptote: $\mathbf{y = 0}$

Vertikale Asymptoten: $x = -\sqrt{-a}$ und $x = \sqrt{-a}$ (für $a < 0$)

Teilaufgabe 1.3 **(7 BE)**
Bestimmen Sie a so, dass der Graph von f_a Extrempunkte besitzt, und berechnen Sie deren Abszissen. Begründen Sie mit dem Steigungsverhalten des Graphen von f_a die Art der Extrempunkte.

[Mögliches Teilergebnis: $f'_a(x) = 2 \cdot a \cdot \left(-x^2 + a\right) \cdot \left(x^2 + a\right)^{-2}$]

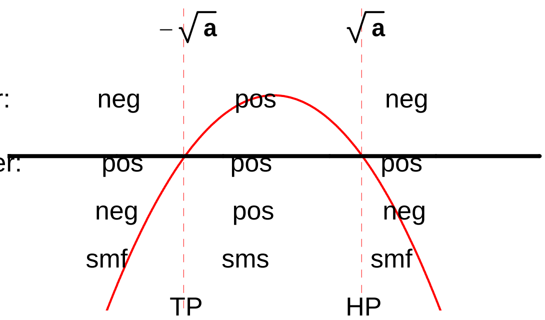
Ableitung mit Quotientenregel: $$f'(x, a) = \frac{\left(x^2 + a\right) \cdot 2 \cdot a - 2 \cdot a \cdot x \cdot 2 \cdot x}{\left(x^2 + a\right)^2} = 2 \cdot a \cdot \frac{\left(-x^2 + a\right)}{\left(x^2 + a\right)^2}$$

Mathcad: $$f'(x, a) := \frac{d}{dx} f(x, a) = \frac{2 \cdot a \cdot \left(a - x^2\right)}{\left(x^2 + a\right)^2}$$

Horizontale Tangenten: $$a - x^2 = 0 \text{ auflösen}, x \to \begin{pmatrix} \sqrt{a} \\ -\sqrt{a} \end{pmatrix}$$

existieren, falls $a > 0$: $\quad x_{E1}(a) := -\sqrt{a} \qquad x_{E2}(a) := \sqrt{a}$

Monotoniebereiche



		$-\sqrt{a}$		$\sqrt{a}$	
Zähler:	neg		pos		neg
Nenner:	pos		pos		pos
f '(x)	neg		pos		neg
G_f	smf		sms		smf
		TP		HP	

Dabei bedeutet
- smf: streng mon. fallend
- sms: streng mon. steigend

TP: $x_{TP} = -\sqrt{a}$

HP: $x_{HP} = \sqrt{a}$

Teilaufgabe 1.4.0
Setzen Sie nun $\mathbf{a = 4}$ und betrachten Sie die Funktion f_4.

Teilaufgabe1.4.1 (3 BE)
Geben Sie die Definitionsmenge D_4 an und bestimmen Sie mit Hilfe der Ergebnisse der Aufgabe 1.3 die Art und die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von f_4.

Definitionsmenge: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

Funktionsterm: $f_4(x) := f(x,4) = \dfrac{8 \cdot x}{x^2 + 4}$

Ableitung: $f'(x) := f'(x,4) = -\dfrac{8 \cdot x^2 - 32}{\left(x^2 + 4\right)^2} = -\dfrac{8 \cdot (x-2) \cdot (x+2)}{\left(x^2 + 4\right)^2}$

Funktionswerte: $f_4(-2) = -2 \quad \Rightarrow \quad TP(-2, -2)$

$f_4(2) = 2 \quad \Rightarrow \quad HP(2, 2)$

Teilaufgabe 1.4.2 (10 BE)
Ermitteln Sie das Krümmungsverhalten des Graphen von f_4 und berechenen Sie die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen von f_4.

Zwischenergebnis: $f'(x) = 8 \cdot \dfrac{-x^2 + 4}{\left(x^2 + 4\right)^2}$

zweite Ableitung mit Quotientenregel:

$$f'(x) = 8 \cdot \frac{\left(x^2 + 4\right)^2 \cdot (-2 \cdot x) - \left(-x^2 + 4\right) \cdot 2 \cdot \left(x^2 + 4\right) \cdot 2 \cdot x}{\left(x^2 + 4\right)^4}$$

Ausklammern und kürzen:

$$f'(x) = 8 \cdot \frac{\left(x^2 + 4\right) \cdot (-2 \cdot x) - 4 \cdot x \cdot \left(-x^2 + 4\right)}{\left(x^2 + 4\right)^3}$$

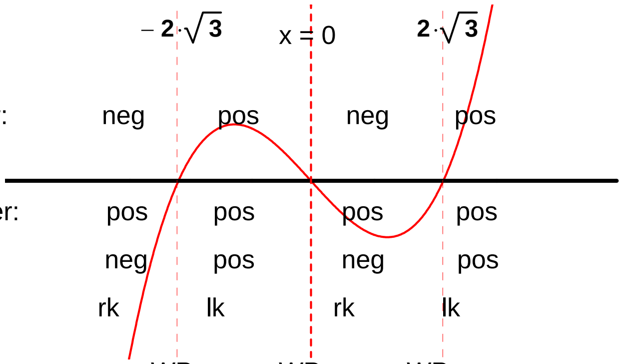
Ausmultiplizieren und Vereinfachen:

$$f'(x) = 8 \cdot \frac{-2 \cdot x^3 - 8 \cdot x + 4 \cdot x^3 - 16 \cdot x}{\left(x^2 + 4\right)^3} = 8 \cdot \frac{2 \cdot x^3 - 24 \cdot x}{\left(x^2 + 4\right)^3} = 16 \cdot \frac{x \cdot \left(x^2 - 12\right)}{\left(x^2 + 4\right)^3}$$

Zähler: $z''(x) := x \cdot (x^2 - 12)$

Nullstellen: $z''(x) = 0 = x \cdot (x^2 - 12) = 0$ auflösen, $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cdot \sqrt{3} \\ -2 \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix}$

Krümmungsbereiche



		$-2\cdot\sqrt{3}$		$x = 0$		$2\cdot\sqrt{3}$	
Zähler:	neg		pos		neg		pos
Nenner:	pos		pos		pos		pos
f ''(x)	neg		pos		neg		pos
G_f	rk		lk		rk		lk
		WP_1		WP_2		WP_3	

Dabei bedeutet
- rk: rechts gekrümmt
- lk: links gekrümmt

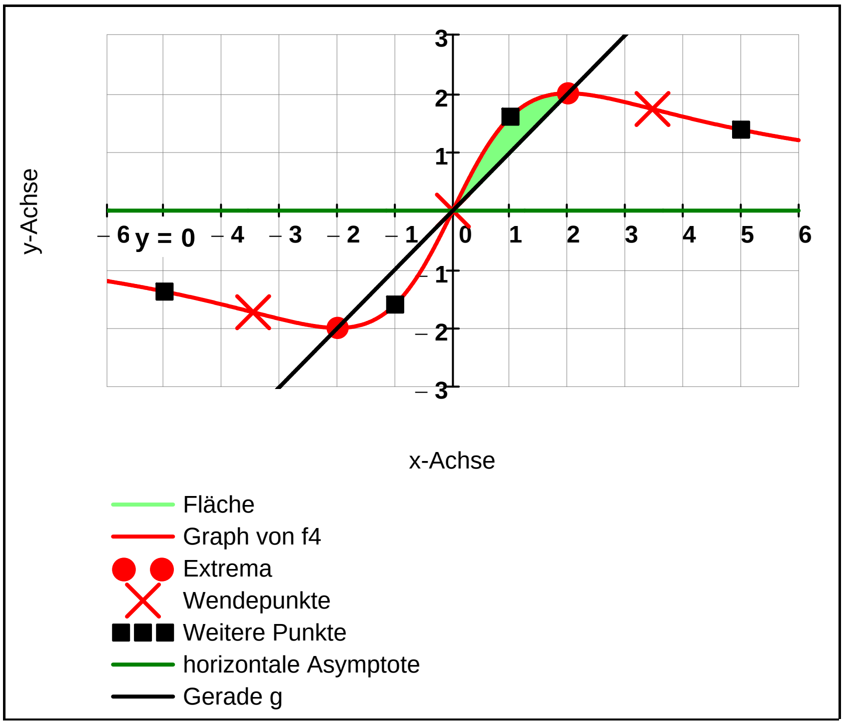
$f_4(-2\cdot\sqrt{3}) = -\sqrt{3} = -1.732$ $\quad$ $WP_1(-2\cdot\sqrt{3}, -\sqrt{3})$

$f_4(0) = 0$ $\quad$ $WP_2(0, 0)$

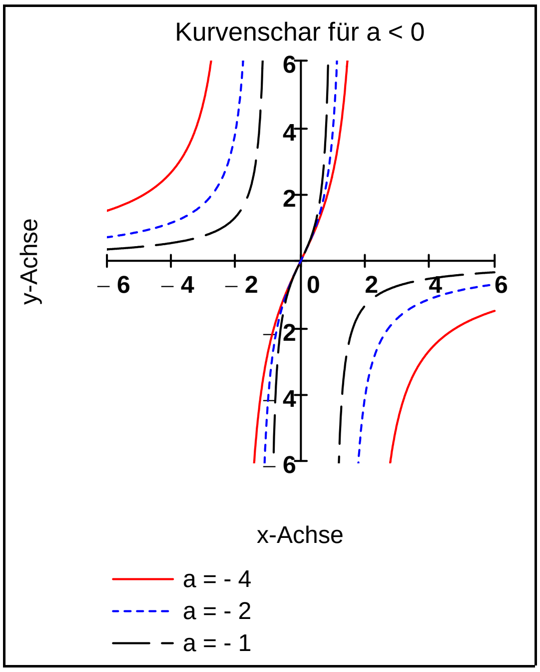
$f_4(2\cdot\sqrt{3}) = \sqrt{3} = 1.732$ $\quad$ $WP_3(2\cdot\sqrt{3}, \sqrt{3})$

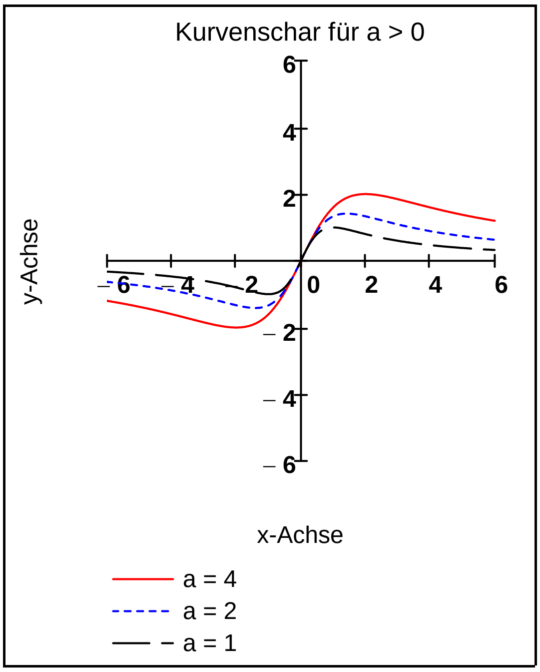
Teilaufgabe 1.4.3 (5 BE)
Zeichnen Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse und geeigneter, zusätzlich berechneter Funktionswerte den Graphen von f_4 für $-5 \le x \le 5$ in ein kartesisches Koordinatensystem.

Maßstab: **1 LE = 1 cm**



In der Prüfung nicht verlangt: Gegenüberstellung der Kurvenschar





Teilaufgabe 1.4.4 **(3 BE)**

Geben Sie die maximale Definitionsmenge D_F der Funktion $\mathbf{F(x) = 4 \cdot \ln\left(x^2 + 4\right)}$ und zeigen Sie, dass F eine Stammfunktion der Funktion $\mathbf{f_4}$ ist.

$x^2 + 4 > 0$ für alle x $\Rightarrow$ $\mathbf{ID_F = IR}$

$F(x) := 4 \cdot \ln\left(x^2 + 4\right) \qquad F'(x) := \frac{d}{dx}F(x) \;\rightarrow\; \frac{8 \cdot x}{x^2 + 4}$

Vergleiche: $f_4(x) = \frac{8 \cdot x}{x^2 + 4}$ $\qquad \Rightarrow$ F ist Stammfunktion von f_4

Teilaufgabe 1.4.5 **(5 BE)**

Die Verbindungsstrecke zwischen dem Koordinatenursprung und dem Hochpunkt des Graphen von $\mathbf{f_4}$ schließt mit dem Graphen von $\mathbf{f_4}$ ein Flächenstück ein.

Markieren Sie dieses Flächenstück im Koordinatensystem der Aufgabe 1.4.3, berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts und geben Sie diese in der Form $\mathbf{k_1 + k_2 \cdot \ln(2)}$ mit reellen Zahlen $\mathbf{k_1}$ und $\mathbf{k_2}$ an.

Stammfunktion: $\displaystyle\int \left(f_4(x) - x\right) dx \rightarrow 4 \cdot \ln\left(x^2 + 4\right) - \frac{x^2}{2}$

Fläche: $\displaystyle A := \int_0^2 \left(f_4(x) - x\right) dx \qquad A = \ln(16) - 2$

$$\boxed{A = 4 \cdot \ln(2) - 2 = 0.773}$$

Teilaufgabe 1.4.6 (4 BE)

Ermitteln Sie diejenigen Geraden aus dem Geradenbüschel $\mathbf{g_m}$ mit der Funktionsgleichung $\mathbf{g_m(x) = m \cdot x,\ x \in IR,\ m \in IR}$, die mit dem Graphen von $\mathbf{f_4}$ genau einen Punkt gemeinsam haben.

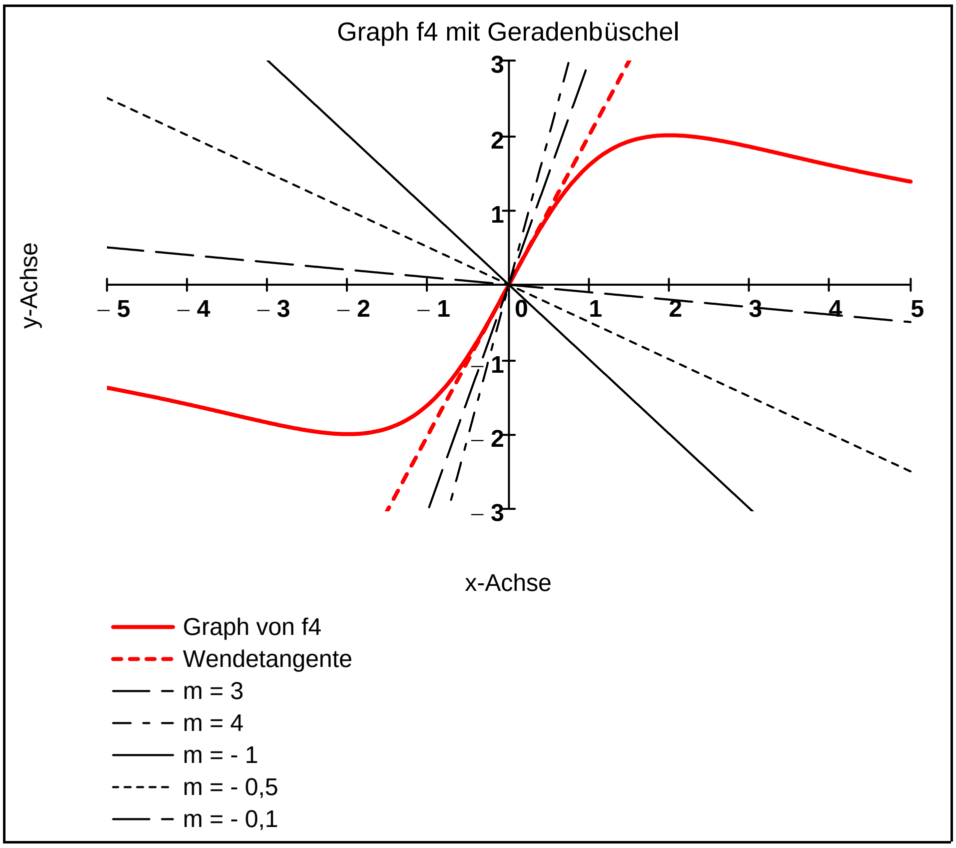
Die Geraden $g_m(x) = m \cdot x$ sind ein Geradenbüschel mit Büschelpunkt (0/0).

Steigung im Ursprung: $f'(0) = 2 \qquad g_2(x) := 2 \cdot x$ das ist die Wendetangente.

$\Rightarrow$ alle Geraden mit $m \geq 2$ oder $m \leq 0$ haben mit G_f nur einen gemeinsamen Punkt.

In der Prüfung nicht verlangt:

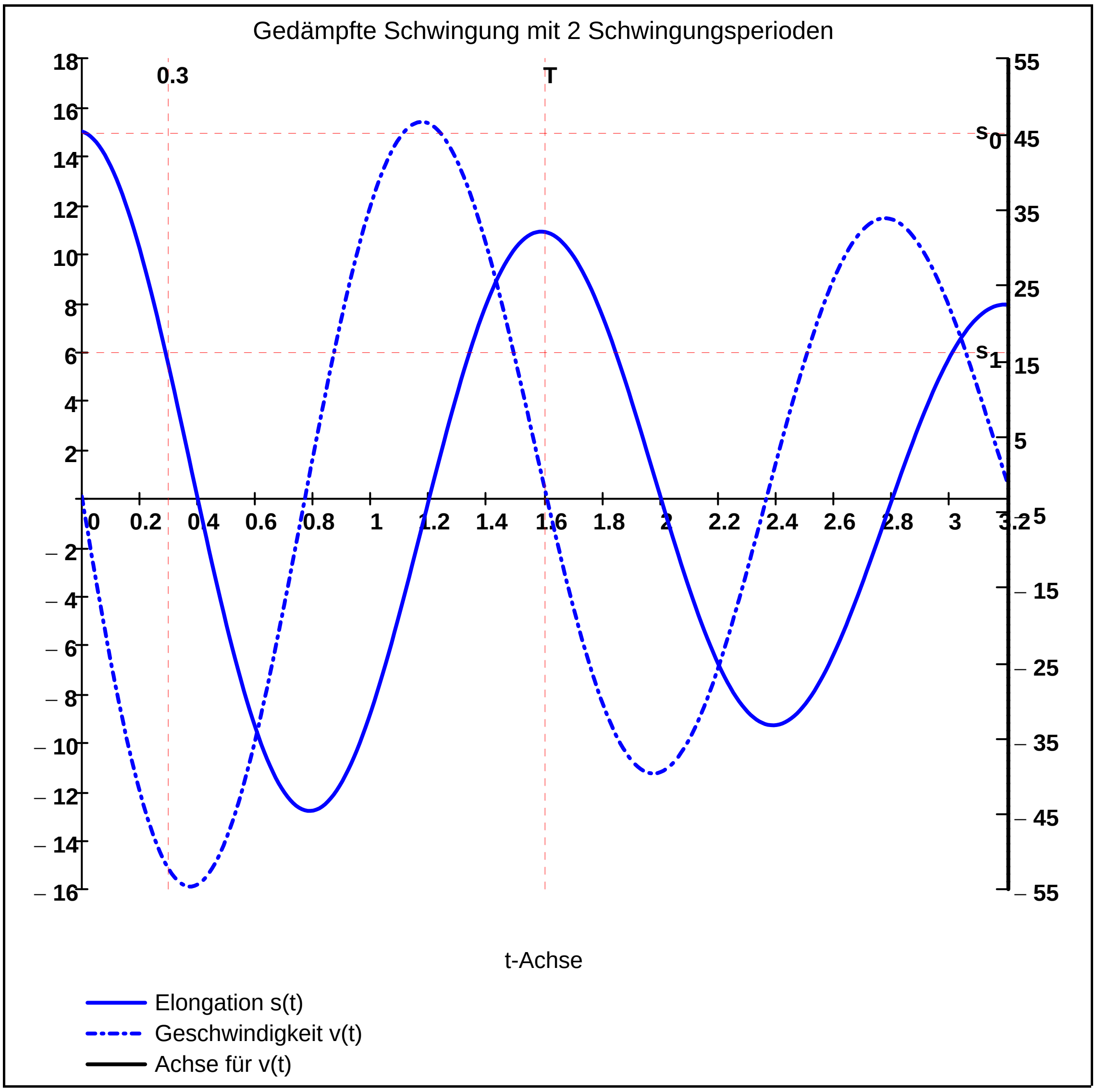
Geradenbüschel: $g(x, m) := m \cdot x$


Graph f4 mit Geradenbüschel
y-Achse
x-Achse
– 5
– 4
– 3
– 2
– 1
0
1
2
3
4
5
3
2
1
– 1
– 2
– 3
Graph von f4
Wendetangente
m = 3
m = 4
m = - 1
m = - 0,5
m = - 0,1

Teilaufgabe 2.0
Gegeben ist die Gleichung einer gedämpften harmonischen Schwingung:

$\mathbf{s(t) = 15 \cdot e^{-0.2 \cdot t} \cdot \cos(3.927 \cdot t)}$ mit $\mathbf{t} \in \mathbf{IR}$ und $\mathbf{t} \geq \mathbf{0}$.
Die Elongation s ist dabei in Abhängigkeit von der Zeit t dargestellt. Physikalische Einheiten bleiben unberücksichtigt.
Gerundete Ergebnisse sind mit drei Nachkommastellen anzugeben.

Gedämpfte Schwingung: $\quad s(t) := 15 \cdot e^{-0.2 \cdot t} \cdot \cos\left(\frac{5}{4} \cdot \pi \cdot t\right)$



Teilaufgabe 2.1 (2 BE)
Berechnen Sie die Elongation zur Zeit $t_0 = 0.3$ und geben Sie die größte auftretende Elongation s_{max} an.

$s\left(\frac{3}{10}\right) = 5.406$ $\qquad$ $s_{max} := s(0) = 15$

Teilaufgabe 2.2 (6 BE)
Bestimmen Sie den kleinsten Wert von t, für den die Elongation $s = 0$ ist, zeigen Sie, dass das Zeitintervall Δt zwischen zwei Nulldurchgängen konstant bleibt und berechnen Sie Δt.

Bestimmung der Nullstellen:

$$\cos\left(\frac{5}{4}\cdot\pi\cdot t\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5}{4}\cdot\pi\cdot t = (2\cdot k + 1)\cdot\frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad t(k) := (2\cdot k + 1)\cdot\frac{2}{5}$$

kleinste Nullstelle: $t_1 := t(0) = 0.4$

nächste Nullstelle: $t_2 := t(1) = 1.2$ $\qquad$ $\Delta t := t_2 - t_1$ $\qquad$ $\Delta t = 0.8$

nächste Nullstelle: $t_3 := t(2) = 2$ $\qquad$ $\Delta t := t_3 - t_2$ $\qquad$ $\Delta t = 0.8$

periodische Funktion mit der Periodenlänge $\quad p := \dfrac{2\cdot\pi}{\frac{5}{4}\cdot\pi} \qquad p = 1.6$

$\Rightarrow$ Der Abstand zwischen zwei Nullstellen beträgt die halbe Periodenlänge.

Teilaufgabe 2.3 (4 BE)

Ermitteln Sie den Funktionsterm der Geschwindigkeit $v(t) = \frac{d}{dt}s(t)$ und berechnen Sie $v(0.3)$,

also die Geschwindigkeit zur Zeit $t_0 = 0.3$.

Erklären Sie die Bedeutung des Vorzeichens von $v(0.3)$.

Ableitung mit der Produktregel:

$$v(t) = 15\cdot\left[-0.2\cdot e^{-0.2\cdot t}\cdot\cos\left(\frac{5}{4}\cdot\pi\cdot t\right) + e^{-0.2\cdot t}\cdot\left(\frac{-5}{4}\cdot\pi\cdot\sin\left(\frac{5}{4}\cdot\pi\cdot t\right)\right)\right]$$

$$v(t) := -15\cdot e^{-0.2\cdot t}\cdot\left(0.2\cdot\cos\left(\frac{5}{4}\cdot\pi\cdot t\right) + \frac{5}{4}\cdot\pi\cdot\sin\left(\frac{5}{4}\cdot\pi\cdot t\right)\right)$$

$v(0.3) = -52.333$

negative Geschwindigkeit $\Rightarrow$ Bewegung von oberhalb der Gleichgewichtslage nach unten.

Teilaufgabe 2.4 (9 BE)
Ermitteln Sie mit Hilfe des Newtonschen Näherungsverfahrens den kleinsten Wert, für den die Elongation $s = 6$ ist. Begründen Sie, warum $t_0 = 0.3$ einen geeigneten Startwert darstellt, führen Sie zwei Näherungsschritte durch und erläutern Sie das Ergebnis hinsichtlich der Genauigkeit des durchgeführten Verfahrens.

Bedingung: $6 = 15 \cdot e^{-0.2 \cdot t} \cdot \cos\left(\frac{5}{4} \cdot \pi \cdot t\right)$

Gesucht ist die Nullstelle von $h(t) := 15 \cdot e^{-0.2 \cdot t} \cdot \cos\left(\frac{5}{4} \cdot \pi \cdot t\right) - 6$

Ableitung: $h'(t) = v(t)$

$t_0 = 0.3$ ist ein guter Startwert, da $s(0.3) = 5.4$ in der Nähe von 6 liegt.

$t_0 := 0.3$ gerundet auf 3 Nachkommastellen

$t_1 := t_0 - \frac{h(t_0)}{v(t_0)}$ $t_1 = 0.28865$ $t_1 = 0.289$

$t_2 := t_1 - \frac{h(t_1)}{v(t_1)}$ $t_2 = 0.28857$ $t_2 = 0.289$

Bei 3 Nachkommastellen ändert sich das Ergebnis bei weiteren Näherungsschritten nicht mehr

Kontrolle: $t_3 := t_2 - \frac{h(t_2)}{v(t_2)}$ $t_3 = 0.289$