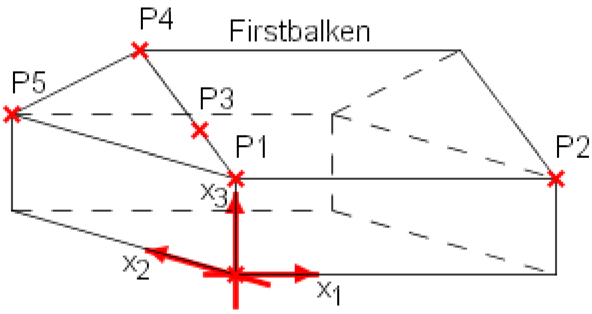
Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2009
Mathematik 12 Technik - B II - Lösung

Ein denkmalgeschütztes, fast verfallenes Gebäude soll wieder aufgebaut werden. Nebenstehende Skizze zeigt den Originalzustand des Hauses in einem kartesischen Koordinatensystem. Die horizontale Grundfläche liegt in der x_1x_2-Ebene.

Durchgeführte Vermessungen haben ergeben, dass die Punkte $P_1(0;\,0;\,3)$, $P_2(10;\,0;\,3)$ und $P_3(0;\,2;\,4)$ auf der vorderen Dachfläche liegen.

Die Koordinaten geben die jeweilige Länge in Meter an, die Einheiten dürfen weggelassen werden.



Teilaufgabe 1 (4 BE)
Stellen Sie eine Gleichung in Koordinatenform für die Ebene E auf, in der die vordere Dachfläche liegt, und geben Sie die besondere Lage dieser Ebene im Koordinatensystem an.
[Mögliches Ergebnis: $-x_2 + 2x_3 - 6 = 0$]

Ortsvektoren: $p_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad p_2 := \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad p_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Richtungsvektoren: $u_E := p_2 - p_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad v_E := p_3 - p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Normalenvektor: $n_E := u_E \times v_E = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 20 \end{pmatrix}$

Normalenform: Koordinatenform:

$$E:\ \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - p_1\right] \cdot \frac{n_E}{10} = 0 \rightarrow 2 \cdot x_3 - x_2 - 6 = 0$$

Da $x_1 = 0 \Rightarrow$ E ist parallel zur x_1-Achse.

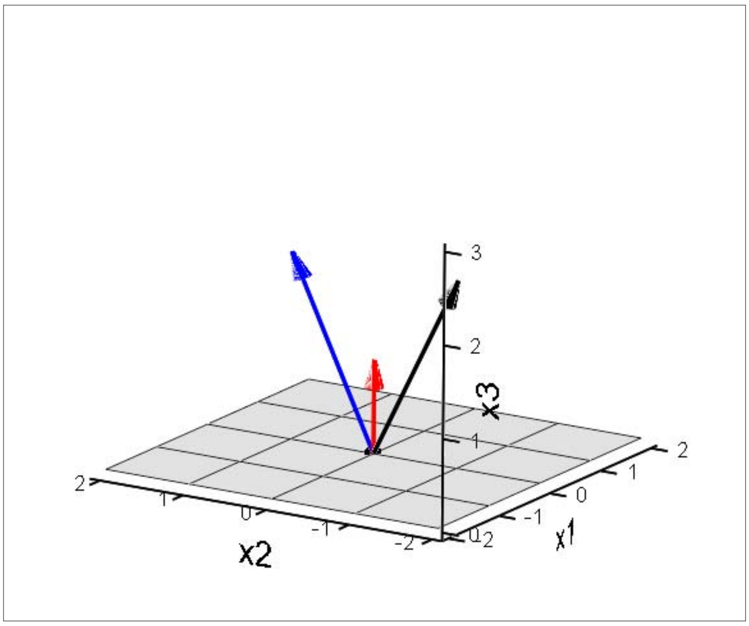
Teilaufgabe 2 (3 BE)
Der Winkel α zwischen der horizontalen Ebene und der Ebene E wird als Dachneigung bezeichnet. Berechnen Sie α.

Normalenvektor der horizontalen Ebene: $n_{12} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\cos(\alpha) = \frac{|n_E \cdot n_{12}|}{|n_E| \cdot |n_{12}|} \qquad \alpha := \operatorname{acos}\left(\frac{|n_E \cdot n_{12}|}{|n_E| \cdot |n_{12}|}\right) \qquad \alpha = 26.6 \cdot \text{Grad}$$

Teilaufgabe 3 **(2 BE)**
Die hintere Dachfläche liegt in der Ebene F, die durch die Gleichung $x_2 + 2x_3 - 20 = 0$ gegeben ist. Begründen Sie, dass die beiden Dachflächen die gleiche Dachneigung α besitzen, ohne den Winkel zwischen der horizontalen Ebene und der Ebene F zu berechnen..

Normalenvektor von F: $n_F := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Normalenvektor von E: $n_E := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$



Die Normalenvektoren liegen wegen ihrer Koordinaten symmetrisch zur x_3-Achse.
Die Ebenen E und F liegen also symmetrisch bzgl. einer Ebene parallel zur x_1x_3-Ebene.
$\Rightarrow$ Die Wnkel der Ebenen zur x_1x_2-Ebene ist ebenfalls symmetrisch.

Teilaufgabe 4 **(4 BE)**
Ermitteln Sie die Gleichung der Geraden f, entlang der der Firstbalken des Daches verläuft.

[Mögliches Ergebnis: $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 6.5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in R$]

$E \cap F = \{ f \}$ Gaußmatrix. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow{(II) + (I)} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 26 \end{pmatrix}$

$x_3 := \frac{26}{4}$ $x_3 = 6.5$ Wähle $x_1(\lambda) := \lambda$ $x_2 := 2 \cdot x_3 - 6$ $x_2 = 7$

Schnittgerade s: $s(\lambda) := \begin{pmatrix} x_1(\lambda) \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 7 \\ \frac{13}{2} \end{pmatrix}$ $s(\tau) \rightarrow \begin{pmatrix} \tau \\ 7 \\ \frac{13}{2} \end{pmatrix}$

Teilaufgabe 5 (6 BE)
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P_4 in der x_2x_3-Ebene (siehe Skizze), die Sparrenlänge $\overline{P_1 P_4}$ sowie den Flächeninhalt der gesamten Dachfläche.

P_3 liegt auf der Schnittgeraden s und in der x_2x_3-Ebene:

es muss gelten: $x_1 = 0$ $\quad s(\tau)_1 = 0 \rightarrow \tau = 0$

$p_4 := s(0)$ $\quad p_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 6.5 \end{pmatrix}$ $\quad$ Punkt: $P_4 := p_4^T$ $\quad P_4 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 7 & \frac{13}{2} \end{pmatrix}$

Sparrenlänge: $d = \overline{P_1 P_4}$ $\quad d := \left| p_4 - p_1 \right|$ $\quad d = \frac{7 \cdot \sqrt{5}}{2} = 7.826$

Vektorprodukt: $V := \left(p_4 - p_1\right) \times \left(p_2 - p_1\right)$ $\quad V = \begin{pmatrix} 0 \\ 35 \\ -70 \end{pmatrix}$

vordere Dachfläche: $A_E := |V|$ $\quad A_E = 35 \cdot \sqrt{5} = 78.3$

gesamte Dachfläche: $A_{ges} := 2 \cdot A_E$ $\quad A_{ges} = 70 \cdot \sqrt{5} = 156.525$

Teilaufgabe 6 (6 BE)
Der Sparren zwischen P_1 und P_4 (siehe Skizze) soll vom Punkt K(4; 6; 0) aus mit einer Stütze, die mit dem Sparren einen rechten Winkel einschließt, stabilisiert werden. Berechnen Sie die Länge der Stütze, sowie die Koordinaten des Befestigungspunktes L am Sparren.

Ortsvektor zu K: $k := \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ Normalenvektor von E: $n_E = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Gerade durch P_1 und P_4: $\quad g_{14}(\tau) := p_1 + \tau \cdot \left(p_4 - p_1\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \cdot \tau \\ \frac{7 \cdot \tau}{2} + 3 \end{pmatrix}$

Vereinfachung des Richtungsvektors: $\quad g_{14}(\tau) := p_1 + \tau \cdot \left(p_4 - p_1\right) \cdot \frac{2}{7} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cdot \tau \\ \tau + 3 \end{pmatrix}$

Lotfußpunkt liegt auf dieser Geraden:: $\mathbf{l}(\tau) := \mathbf{g_{14}}(\tau) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2\cdot\tau \\ \tau + 3 \end{pmatrix}$

Verbindungsvektor zwischen Lotfußpunkt L und Punkt K steht senkrecht auf g_{12} $\Rightarrow$

$$\tau_1 := (\mathbf{l}(\tau) - \mathbf{k})\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow 5\cdot\tau - 9 = 0 \text{ auflösen}, \tau \;\rightarrow \frac{9}{5}$$

Lotfußpunkt: $\mathbf{l_F} := \mathbf{l}(\tau_1) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{18}{5} \\ \frac{24}{5} \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{L} := \mathbf{l_F}^T \quad \mathbf{L} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \frac{18}{5} & \frac{24}{5} \end{pmatrix} = (0 \;\; 3.6 \;\; 4.8)$

Verbindungsvektor: $\mathbf{LK} := \mathbf{k} - \mathbf{l_F} \quad \mathbf{LK} = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{12}{5} \\ -\frac{24}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2.4 \\ -4.8 \end{pmatrix}$

Länge des Verbindungsvektors: $\mathbf{d_{LK}} := |\mathbf{LK}| \quad \mathbf{d_{LK}} = \frac{4\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{14}}{5} = 6.693$

Teilaufgabe 7 (5 BE)
Zur Bestimmung des Volumens des umbauten Raumes ist der Punkt $P_5(0; 14; 3)$ gegeben. Gegenüberliegende Wände sind zueinander parallel. Berechnen Sie das Volumen des umbauten Raumes sowie den prozentualen Anteil, den das Dachgeschoss davon einnimmt.

Volumen des Quaders (Erdgeschoß):

Länge über P_2: $\mathbf{p_2} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a} := 10$

Breite über Punkt P_5: $\mathbf{p_5} := \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} := 14$

Höhe über Punkt P_1: $\mathbf{p_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} := 3$

$\mathbf{V_{EG}} := \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} \qquad \mathbf{V_{EG}} = 420$

$$p_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 6.5 \end{pmatrix} \qquad p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Volumen des Prismas (Dachgeschoß):

Länge über P_2:

$a := 10$

Breite über Punkt P_5:

$b := 14$

Höhe über Punkt P_4 und P_1:

$h := 6.5 - 3 \qquad h = 3.5$

$$V_{DG} := \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot h \qquad V_{DG} = 245 \qquad V_{ges} := V_{EG} + V_{DG} \qquad V_{ges} = 665$$

$$\frac{V_{DG}}{V_{ges}} = 36.8 \cdot \%$$

Darstellung