Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2009
Mathematik 13 Nichttechnik - B II - Lösung

Teilaufgabe 1.0
Ein Apfelanbaugebiet lässt sich in drei Bereiche (I): Produktion von Apfelsafterzeugnissen, (II): Produktion von Apfelschnaps und (III): Produktion von Apfelkonfekt einteilen. Diese Bereiche sind untereinander und mit dem Markt nach dem Leontief-Modell verflochten. Die Gesamtproduktion dieses Jahres beträgt im Bereich (I) **3000 ME** , in Bereich (II) **80 ME** und in Bereich (III) **60 ME**.

Die Inputmatrix ist gegeben durch $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0.4 & 10 & 2 \\ 0 & 0.1 & 1 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}$.

Teilaufgabe 1.1 (3 BE)
Deuten Sie den Wert des Elements $\mathbf{a_{12} = 10}$ und die Werte **0** in der Inputmatrix im Sachzusammenhang.

$\mathbf{a_{12} = 10}$ bedeutet, zur Herstellung von einer Mengeneinheit Apfelschnaps 10 Mengeneinheiten Safterzeugnisse benötigt.
$\mathbf{a_{21} = a_{31} = 0}$ bedeutet, zur Herstellung von Safterzeugnissen werden keine anderen Produkte benötigt.
$\mathbf{a_{32} = 10}$ bedeutet, zur Herstellung von Schnaps wird kein Apfelkonfekt benötigt.

Teilaufgabe 1.2 (3 BE)
Bestimmen Sie die Input-Output-Tabelle dieses Jahres.

Gegeben: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.4 & 10 & 2 \\ 0 & 0.1 & 1 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{x} := \begin{pmatrix} 3000 \\ 80 \\ 60 \end{pmatrix}$

Gesucht: y, Warenflussmatrix

Grundgleichung für Verflechtungen: $\mathbf{(E - A)\cdot \vec{x} = \vec{y}}$

Definitionen

Zwischenrechnung: $\mathbf{E - A} = \begin{pmatrix} 0.6 & -10 & -2 \\ 0 & 0.9 & -1 \\ 0 & 0 & 0.9 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{y} := (\mathbf{E} - \mathbf{A})\cdot\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 880.0 \\ 12.0 \\ 54.0 \end{pmatrix}$

Marktvektor: $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 880 \\ 12 \\ 54 \end{pmatrix}$

Verflechtungsmatrix: $V0 := \begin{pmatrix} A_{1,1}\cdot x_1 & A_{1,2}\cdot x_2 & A_{1,3}\cdot x_3 \\ A_{2,1}\cdot x_1 & A_{2,2}\cdot x_2 & A_{2,3}\cdot x_3 \\ A_{3,1}\cdot x_1 & A_{3,2}\cdot x_2 & A_{3,3}\cdot x_3 \end{pmatrix}$ $\quad V0 = \begin{pmatrix} 1200 & 800 & 120 \\ 0 & 8 & 60 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Berechnungen

$$\text{Warenflussmatrix} = \begin{pmatrix} \text{"Bereiche"} & \text{"I"} & \text{"II"} & \text{"III"} & \text{"y"} & \text{"x"} \\ \text{"I"} & 1200 & 800 & 120 & 880 & 3000 \\ \text{"II"} & 0 & 8 & 60 & 12 & 80 \\ \text{"III"} & 0 & 0 & 6 & 54 & 60 \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe 1.3 (4 BE)

Im nächsten Jahr ist der Konsumvektor $\vec{y} = (5800 \;\; 8 \;\; 90)^T$ zu erwarten. Ermitteln Sie den zugehörigen Produktionsvektor $\vec{x}$.

Gegeben: $A = \begin{pmatrix} 0.4 & 10 & 2 \\ 0 & 0.1 & 1 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}$ $\quad y := \begin{pmatrix} 5800 \\ 8 \\ 90 \end{pmatrix}$

Gesucht: $\vec{x}$

Definitionen

Zwischenrechnungen:

Inputmatrix: $A = \begin{pmatrix} 0.4 & 10 & 2 \\ 0 & 0.1 & 1 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}$ $\quad E - A = \begin{pmatrix} 0.6 & -10 & -2 \\ 0 & 0.9 & -1 \\ 0 & 0 & 0.9 \end{pmatrix}$

Zu lösendes Gleichungssystem:

$$(E - A)\cdot x(x_1, x_2, x_3) = y \rightarrow \begin{pmatrix} 0.6\cdot x_1 - 2\cdot x_3 - 10\cdot x_2 \\ 0.9\cdot x_2 - x_3 \\ 0.9\cdot x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5800 \\ 8 \\ 90 \end{pmatrix}$$

Berechnungen

Gaußmatrix G aufstellen: $\quad$ In Diagonalform bringen: $\quad$ Lösungsvektor $\vec{x}$ abrufen:

$$G = \begin{pmatrix} 0.6 & -10 & -2 & 5800 \\ 0 & 0.9 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0.9 & 90 \end{pmatrix} \quad G_{diag} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 12000 \\ 0 & 1 & 0 & 120 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 12000 \\ 120 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe 1.4 (5 BE)
Um die gestiegene Nachfrage befriedigen zu können, pachtet der Bauer zusätzlich Streuobstwiesen, so dass die Produktion von Apfelsafterzeugnissen auf **14000 ME** steigt.
Ermitteln Sie, in welchem größten Intervall die Produktion von Apfelschnaps liegt, wenn die Produktion von Apfelkonfekt auf **540 ME** steigen soll.

Neuer Produktionsvektor: $$x(x_2) := \begin{pmatrix} 14000 \\ x_2 \\ 540 \end{pmatrix}$$

Definitionen

Zwischenrechnung: $$E - A = \begin{pmatrix} 0.6 & -10 & -2 \\ 0 & 0.9 & -1 \\ 0 & 0 & 0.9 \end{pmatrix}$$

Berechung: $$y(x_2) \rightarrow \begin{pmatrix} 7320.0 - 10 \cdot x_2 \\ 0.9 \cdot x_2 - 540 \\ 486.0 \end{pmatrix}$$

Ungleichungen: $$y(x_2)_1 \geq 0 \rightarrow 7320.0 - 10 \cdot x_2 \geq 0 \text{ auflösen}, x_2 \rightarrow -\infty < x_2 \leq 732.0$$

$$y(x_2)_2 \geq 0 \rightarrow 0.9 \cdot x_2 - 540 \geq 0 \text{ auflösen}, x_2 \rightarrow 600.0 \leq x_2 < \infty$$

Kompletter Bereich: $$\begin{pmatrix} y(x_2)_1 \geq 0 \\ y(x_2)_2 \geq 0 \end{pmatrix} \text{ auflösen}, x_2 \rightarrow 600.0 \leq x_2 \leq 732.0$$

Teilaufgabe 1.5 (4 BE)
Der alte Bauer übergibt seinen Betrieb an seinen Sohn, der viel sparsamer produzieren möchte. Dadurch verändern sich die Werte a_{11}, a_{22} und a_{33} der Inputmatrix auf die Hälfte des bisherigen Wertes. Alle anderen Werte der Inputmatrix A bleiben unverändert. Berechnen Sie die Abgaben an den Markt, wenn die Produktion im Bereich (I) **14000 ME**, im Bereich (II) **600 ME** und im Bereich (III) **540 ME** beträgt.

$$A := \begin{pmatrix} 0.2 & 10 & 2 \\ 0 & 0.05 & 1 \\ 0 & 0 & 0.05 \end{pmatrix} \qquad x := \begin{pmatrix} 14000 \\ 600 \\ 540 \end{pmatrix}$$

Definitionen

Zwischenrechnung:

$$E - A = \begin{pmatrix} 0.8 & -10 & -2 \\ 0 & 0.95 & -1 \\ 0 & 0 & 0.95 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$y := (E - A)\cdot x = \begin{pmatrix} 4120.0 \\ 30.0 \\ 513.0 \end{pmatrix}$$

Marktvektor:

$$y = \begin{pmatrix} 4120 \\ 30 \\ 513 \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe 2.0

In einem Koordinatensystem des IR^3 sind die Punkte **A(1 / −2 / −1)** , **B(−2 / 1 / 2)** und **C(2 / 3 / 0)**, die Ebene F: $2\cdot x_1 + x_3 + 2 = 0$ und die Geradenschar $h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + k\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix}$

mit k, a $\in$ IR gegeben.

Teilaufgabe 2.1 **(3 BE)**

Zeigen Sie, dass die Punkte **A**, **B** und **C** nicht auf einer Geraden liegen.

Ortsvektoren:

$$a := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad c := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Verbindungsvektoren:

$$AB := b - a \rightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad AC := c - a \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \lambda\cdot AC \qquad \begin{pmatrix} AB_1 = \lambda_1\cdot AC_1 \\ AB_2 = \lambda_2\cdot AC_2 \\ AB_3 = \lambda_3\cdot AC_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 = \lambda_1 \\ 3 = 5\cdot\lambda_2 \\ 3 = \lambda_3 \end{pmatrix} \text{auflösen}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & \frac{3}{5} & 3 \end{pmatrix}$$

Unterschiedliche Vielfache, A, B, und C liegen nicht auf einer Geraden.

Teilaufgabe 2.2 **(5 BE)**

Die Punkte **A**, **B** und **C** legen eine Ebene **E** fest. Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Ebene in Koordinatenform.

[Mögliches Ergebnis: **E:** $2\cdot x_1 - x_2 + 3\cdot x_3 - 1 = 0$]

Ebene E in Parameterform:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = a + \lambda\cdot AB + \mu\cdot AC \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu - 3\cdot\lambda + 1 \\ 5\cdot\mu + 3\cdot\lambda - 2 \\ \mu + 3\cdot\lambda - 1 \end{pmatrix}$$

Eintragen in Gauß-Matrix:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & x_1 - 1 \\ 3 & 5 & x_2 + 2 \\ 3 & 1 & x_3 + 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(III) + (I)}]{\text{(II) + (I)}} \begin{pmatrix} -3 & 1 & x_1 - 1 \\ 0 & 6 & x_1 + x_2 + 1 \\ 0 & 2 & x_1 + x_3 \end{pmatrix} \xrightarrow[3\cdot\text{(III)} - \text{(II)}]{} \begin{pmatrix} -3 & 1 & x_1 - 1 \\ 0 & 6 & x_1 + x_2 + 1 \\ 0 & 0 & 2\cdot x_1 - x_2 + 3\cdot x_3 - 1 \end{pmatrix}$$

Ebene E: $2\cdot x_1 - x_2 + 3\cdot x_3 - 1 = 0$

Teilaufgabe 2.3 (6 BE)
Geben Sie die besondere Lage der Ebene **F** im Koordinatensystem an und ermitteln Sie eine Gleichung der Schnittgerade **s** der beiden Ebenen **E** (aus 2.2) und **F**.

[Mögliches Ergebnis: **s:** $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$]

Ebene F fehlt x_2-Koordinate und konstanter Term, also ist F echt parallel zur x_2-Achse.

E ∩ F :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[(II)-(I)]{} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Wähle: $x_3(t) := t$ $\quad x_2(t) := -3 + 2 \cdot t$ $\quad x_1(t) := \frac{1}{2} \cdot (1 - 3 \cdot t + x_2(t)) \rightarrow -\frac{t}{2} - 1$

Schnittgerade: $s(t) := \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{t}{2} - 1 \\ 2 \cdot t - 3 \\ t \end{pmatrix}$

Teilaufgabe 2.4 (7 BE)
Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden **s** (aus 2.3) und $\mathbf{h_a}$ in Abhängigkeit von a.

Gerade h_a: $h_a(k, a) := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ Gerade s: $s(t) := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Geraden parallel?

$\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$1 = -\lambda$ auflösen, $\lambda \rightarrow -1$

$2 = 2 \cdot \lambda$ auflösen, $\lambda \rightarrow 1$

Widerspruch, also nicht parallel

Geraden schneiden sich?

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 4 & -a & 2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[(III) + 2 \cdot (I)]{(II) + 4 \cdot (I)} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 0 & -a-4 & 18 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[(III) \cdot (-a-4) - 4 \cdot (II)]{} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 0 & -a-4 & 18 \\ 0 & 0 & 48 - 6 \cdot a \end{pmatrix}$$

Geraden schneiden sich, falls $48 - 6 \cdot a = 0$ auflösen, $a \rightarrow 8$

Geraden sind windschief, falls $a \neq 8$