Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2010
Mathematik 12 Nichttechnik - A I - Lösung

Teilaufgabe 1.0

Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a(x) = -\frac{1}{8} \cdot x \cdot (x - a) \cdot (x - 5)^2$ mit $ID_{f_a} = IR$ und $a \in IR$.

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a die Anzahl, Lage und Vielfachheiten der Nullstellen von f_a.

$$-\frac{1}{8} \cdot x \cdot (x - a) \cdot (x - 5)^2 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \\ a \end{pmatrix}$$

$a = 0$	zwei Nullstellen: (0/0) doppelt und (5/0) doppelt
$a = 5$	zwei Nullstellen: (0/0) einfach und (5/0) dreifach
$a \neq 0 \wedge a \neq 5$	drei Nullstellen: (0/0) einfach, (5/0) zweifach und (a/0) einfach

Teilaufgabe 1.2 (3 BE)

Bestimmen Sie $a \in IR$ so, dass der Punkt $P(4 / -\frac{1}{2})$ auf dem Graphen der Funktion f_a liegt.

allgemeiner Funktionsterm: $f(x, a) := -\frac{1}{8} \cdot x \cdot (x - a) \cdot (x - 5)^2$

$$a_0 := f(4, a) = -\frac{1}{2} \rightarrow \frac{a}{2} - 2 = -\frac{1}{2} \text{ auflösen}, a \rightarrow 3$$

konkreter Funktionsterm:

$$f(x, a_0) = -\frac{x \cdot (x - 3) \cdot (x - 5)^2}{8}$$

Teilaufgabe 2.0
Nun wird $\mathbf{a = 3}$ gesetzt. Die Funktion $\mathbf{f_3}$ wird im Folgenden kurz mit **f** bezeichnet.

Es gilt: $f(x) = -\frac{1}{8}\cdot x\cdot(x-3)\cdot(x-5)^2$

Teilaufgabe 2.1 (3 BE)

Zeigen Sie, dass sich die Funktion f auch in der Form $f(x) = -\frac{1}{8}\cdot\left(x^4 - 13\cdot x^3 + 55\cdot x^2 - 75\cdot x\right)$ darstellen lässt.

Term ausmultipizieren: $x\cdot(x-3)\cdot(x-5)^2$ erweitern $\rightarrow x^4 - 13\cdot x^3 + 55\cdot x^2 - 75\cdot x$

$$f(x) := -\frac{1}{8}\cdot\left(x^4 - 13\cdot x^3 + 55\cdot x^2 - 75\cdot x\right)$$

Teilaufgabe 2.2 (9 BE)
Ermitteln Sie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen der Funktion **f**.

Ableitungsfunktion: $f'(x) := -\frac{1}{8}\cdot\left(4\cdot x^3 - 39\cdot x^2 + 110\cdot x - 75\right)$

Horizontale Tangenten: $4\cdot x^3 - 39\cdot x^2 + 110\cdot x - 75 = 0$

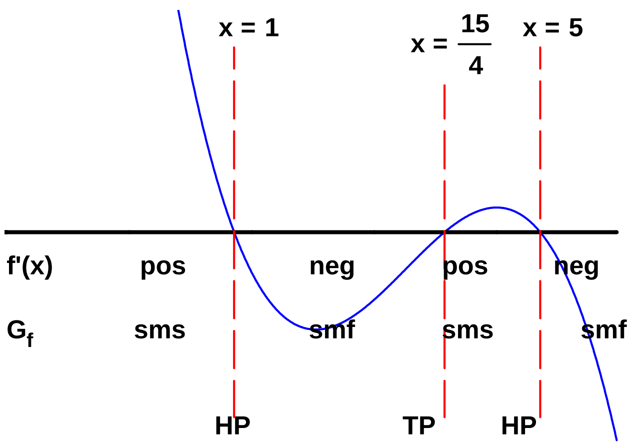
Eine Lösung wird erraten: $f'(1) = 0 \qquad x_1 := 1$

Polynomdivision: $p(x) := \dfrac{4\cdot x^3 - 39\cdot x^2 + 110\cdot x - 75}{x-1}$ parfrac $\rightarrow 4\cdot x^2 - 35\cdot x + 75$

weitere Lösungen: $p(x) = 0 \rightarrow 4\cdot x^2 - 35\cdot x + 75 = 0$ auflösen, x $\rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{15}{4} \end{pmatrix}$

$$x_2 := \frac{15}{4} \qquad x_3 := 5$$

Graph der 1. Ableitung



$f(1) = 4$

$HP_1(1, 4)$

$f\left(\frac{15}{4}\right) = -0.55$

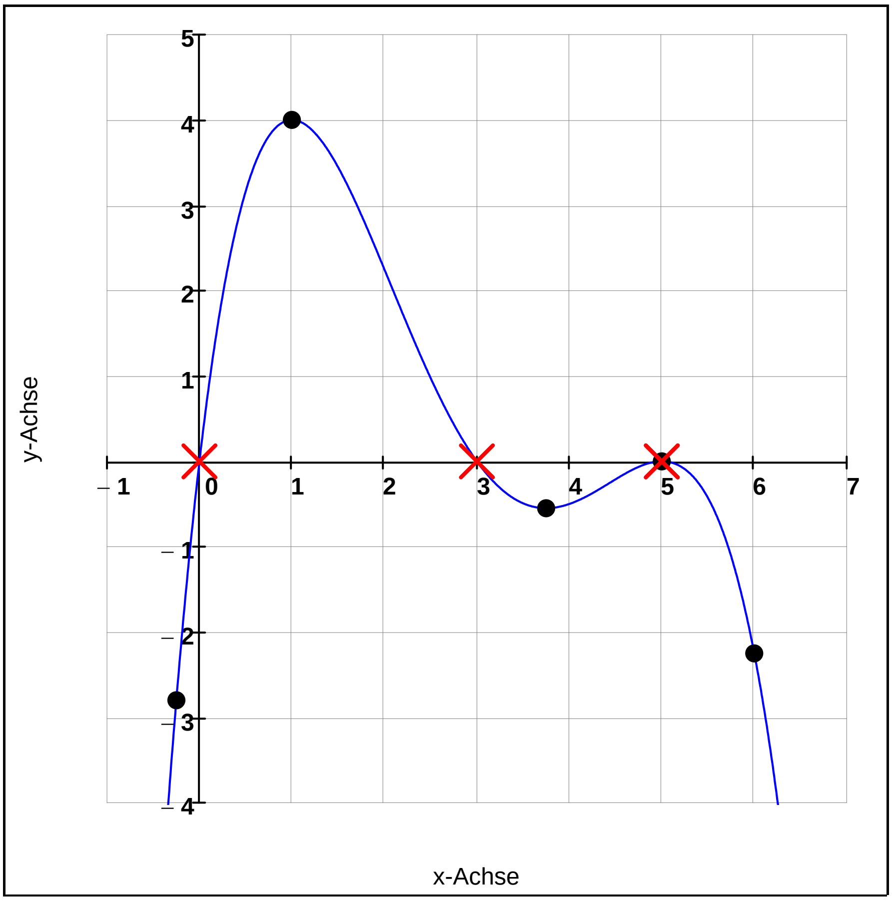
$TP\left(\frac{15}{4}, -0.55\right)$

$f(5) = 0$

$HP_2(5, 0)$

Teilaufgabe 2.3 (4 BE)
Zeichnen Sie den Graphen der Funktion **f** im Bereich $-0.25 \le x \le 6$ mit Hilfe vorliegender Ergebnisse in ein Koordinatensystem. Maßstab auf beiden Achsen: **1 LE = 1 cm** .

$f(-0.25) = -2.799$ $\qquad$ $f(6) = -2.25$



Teilaufgabe 2.4 (4 BE)
Der Graph der Funktion **f** und die x-Achse schließen im 4. Quadranten ein Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts auf zwei Nachkommastellen genau.

Stammfunktion: $\quad F(x, C) := \int f(x)\, dx + C \rightarrow \frac{13 \cdot x^4}{32} - \frac{x^5}{40} - \frac{55 \cdot x^3}{24} + \frac{75 \cdot x^2}{16} + C$

obere Grenze: $\quad F(5, C) = C + \frac{625}{96}$ $\qquad$ untere Grenze: $\quad F(3, C) = C + \frac{1143}{160}$

Fläche: $\quad A := \left| \int_3^5 f(x)\, dx \right|$ $\qquad$ $A = 0.633$

Teilaufgabe 3.0
Forscher untersuchten jeweils fünf Tage lang das Wachstum von Bakteriensorten. Hierbei ergab sich, dass die von den Bakterien bedeckte Fläche annähernd durch die reelle Funktion

$\mathbf{A(t) = \frac{1}{8}\cdot\left(t^3 + a\cdot t^2 + b\cdot t + c\right)}$ mit **a, b, c** $\in$ **IR** und **t** $\in$ **[0 ; 5]**.

beschrieben werden kann, wobei $\mathbf{A(t)}$ die bedeckte Fläche (in $\mathbf{mm^2}$) zum Zeitpunkt t (in Tagen) bezeichnet.
Bei einer bestimmten Sorte war zu Beginn des Untersuchungszeitraums (**t = 0**) die von den Bakterien bedeckte Fläche $\mathbf{1\ mm^2}$ groß. Nach zwei Tagen hat der Bestand sein Maximum mit $\mathbf{5\ mm^2}$ erreicht.

Teilaufgabe 3.1 (6 BE)
Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b und c und damit $\mathbf{A(t)}$.

[Ergebnis: $\mathbf{A(t) = \frac{1}{8}\cdot\left(t^3 - 12\cdot t^2 + 36\cdot t + 8\right)}$]

Allgemeine Funktion: $\quad A(t,a,b,c) := \frac{1}{8}\cdot\left(t^3 + a\cdot t^2 + b\cdot t + c\right)$

Ableitungsfunktion: $\quad A'(t,a,b,c) := \frac{d}{dt}A(t,a,b,c) \rightarrow \frac{3\cdot t^2}{8} + \frac{a\cdot t}{4} + \frac{b}{8}$

Aufstellen und Lösen des Gleichungssystems:

$$Lsg := \begin{pmatrix} A(0,a,b,c) = 1 \\ A(2,a,b,c) = 5 \\ A'(2,a,b,c) = 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{c}{8} = 1 \\ \frac{a}{2} + \frac{b}{4} + \frac{c}{8} + 1 = 5 \\ \frac{a}{2} + \frac{b}{8} + \frac{3}{2} = 0 \end{pmatrix} \text{auflösen}, a, b, c \rightarrow (-12 \quad 36 \quad 8)$$

Abrufen der Lösungen:

$a_1 := Lsg_{1,1} \qquad a_1 = -12 \qquad\qquad b_1 := Lsg_{1,2} \qquad b_1 = 36 \qquad\qquad c_1 := Lsg_{1,3} \qquad c_1 = 8$

$$A(t) := A\left(t, a_1, b_1, c_1\right) \rightarrow \frac{t^3}{8} - \frac{3\cdot t^2}{2} + \frac{9\cdot t}{2} + 1 \text{ Faktor}, \frac{1}{8} \rightarrow \frac{t^3 - 12\cdot t^2 + 36\cdot t + 8}{8}$$

Teilaufgabe 3.2 (2 BE)
Berechnen Sie die von den Bakterien nach drei Stunden bedeckte Fläche gerundet auf eine Nachkommastelle genau.

Stunden umgerechnet in Tage: $\quad \frac{3}{24} = 0.125$

$A(0.125) = 1.539$ $\qquad$ Nach drei Stunden beträgt die bedeckte Fläche $\mathbf{1.5\cdot mm^2}$

Teilaufgabe 3.3 **(5 BE)**
Ermitteln Sie die Wendestelle t_W der Funktion A und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik.

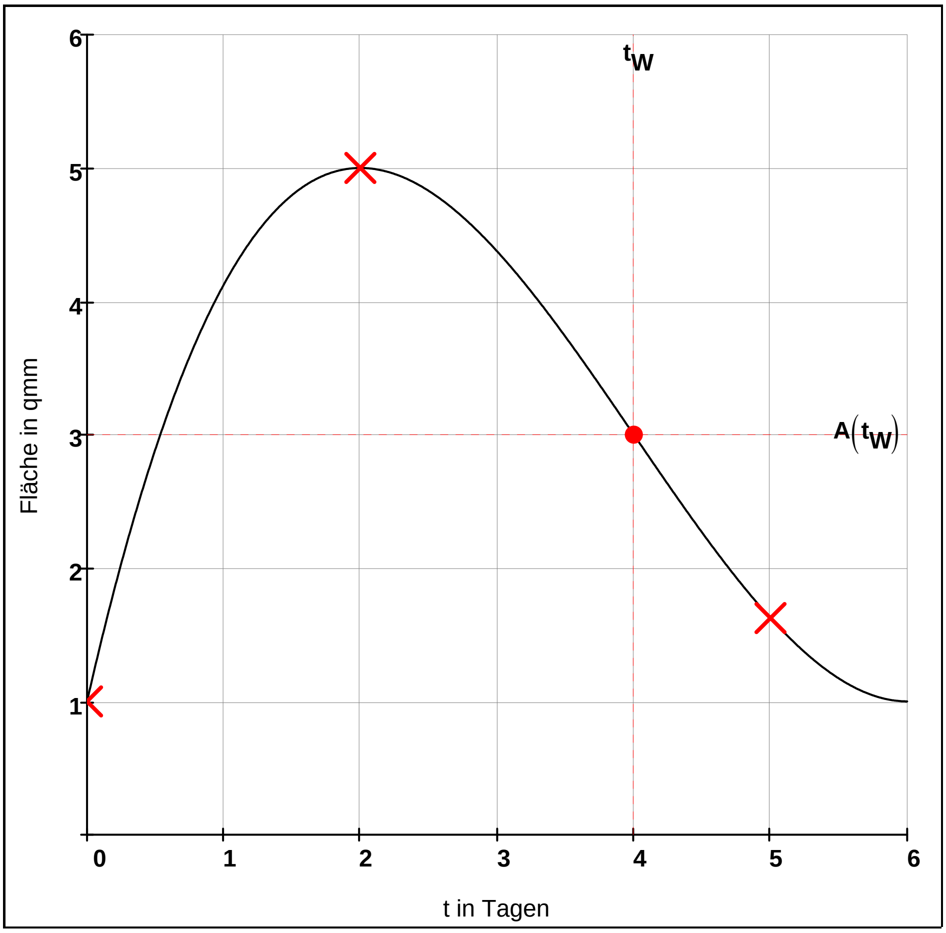
1. Ableitung: $A'(t) := \frac{d}{dt}A(t) \rightarrow \frac{3 \cdot t^2}{8} - 3 \cdot t + \frac{9}{2}$

2. Ableitung: $A''(t) := \frac{d}{dt}A'(t) \rightarrow \frac{3 \cdot t}{4} - 3$

Wendepunkt: $t_W := A''(t) = 0 \rightarrow \frac{3 \cdot t}{4} - 3 = 0$ **auflösen**, $t \rightarrow 4$ Nullstelle mit Vorzeichenwechsel also Wendepunkt

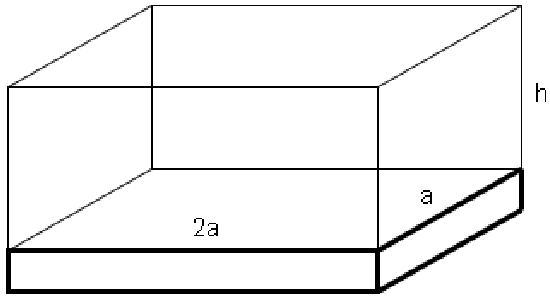
$A'(t_W) = -1.5$ < 0, also ist zum Zeitpunkt t = 4 Tage die momentanen Abnahme/Änderungsrate der bedeckten Fläche am größten

Teilaufgabe 3.4 **(3 BE)**
Zeichnen Sie für $t \in [0 ; 5]$ den Graphen der Funktion A mit Hilfe der vorliegenden Ergebnisse.



$A(5) = 1.62$

Teilaufgabe 4.0
Ein Schildkrötenbesitzer baut für seine Landschildkröte ein Terrarium mit einem quaderförmigen lichtdurchlässigen Dach der Länge $2\,a$, der Breite a und der Höhe h. Dieses wird auf ein geeignetes Fundament gesetzt.
Die lichtdurchlässige Oberfläche soll $4 \cdot m^2$ betragen.
Führen Sie die folgenden Rechnungen ohne Einheiten durch.



Teilaufgabe 4.1 (4 BE)
Bestimmen Sie das Volumen $V(a)$ des Daches in Abhängigkeit von a.

[Mögliches Ergebnis: $V(a) = \frac{4}{3} \cdot a - \frac{2}{3} \cdot a^3$]

Zielfunktion: $V(a,h) = 2 \cdot a \cdot a \cdot h$

Nebenbedingung: $O(a,h) = 2 \cdot a^2 + 2 \cdot a \cdot h + 2 \cdot 2 \cdot a \cdot h = 2 \cdot a^2 + 6 \cdot a \cdot h$

$O(a,h) = 4$ $\quad 2 \cdot a^2 + 6 \cdot a \cdot h = 4$ auflösen, $h \rightarrow -\frac{a^2 - 2}{3 \cdot a}$ $\quad h(a) := -\frac{a^2 - 2}{3 \cdot a}$

Nebenbedingung einsetzen: $V(a) = 2 \cdot a^2 \cdot \left(\frac{2 - a^2}{3 \cdot a}\right) = \frac{4}{3} \cdot a - \frac{2}{3} \cdot a^3$

Zielfunktion: $V(a) := \frac{4}{3} \cdot a - \frac{2}{3} \cdot a^3$

Teilaufgabe 4.2 (5 BE)
Bestimmen Sie eine sinnvolle Definitionsmenge D_V der Funktion $V(a)$ für den in 4.0 gegebenen Sachzusammenhang.

1. Bedingung: $a > 0$

2. Bedingung: $h = 0$ $\quad -\frac{a^2 - 2}{3 \cdot a} = 0$ auflösen, $a \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ keine Lösung

Definitionsmenge: $ID =]\, 0\,;\, \sqrt{2}\, [$

Teilaufgabe 4.3 (7 BE)
Ermitteln Sie a so, dass das Volumen des Daches den größten Wert annimmt. Berechnen Sie hierfür auch die zugehörige Höhe h.

$$V'(a) := \frac{d}{da}V(a) \rightarrow \frac{4}{3} - 2\cdot a^2$$

Horizontale Tangenten: $V'(a) = 0 \rightarrow \frac{4}{3} - 2\cdot a^2 = 0 \text{ auflösen}, a \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$ Extremum / keine Lösung

Extremum: $a_E := \frac{\sqrt{6}}{3}$

Funktionswert: $V(a_E) = 0.726$

Vergleich mit den Randwerten:

$$\lim_{a \to 0^+} \left(\frac{4}{3}\cdot a - \frac{2}{3}\cdot a^3\right) \rightarrow 0 \qquad \lim_{a \to \sqrt{2}^-} \left(\frac{4}{3}\cdot a - \frac{2}{3}\cdot a^3\right) \rightarrow 0$$

Also ist $a := \frac{\sqrt{6}}{3}$ ($a = 0.82$) absolutes Maximum

Zugehörige Höhe in m: $h(a) = 0.544$