Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2010
Mathematik 12 Nichttechnik - A II - Lösung

Teilaufgabe 1.0
Der Graph G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades besitzt den Extrempunkt **E(4 / 0)**, schneidet die y-Achse im Punkt **(0 / 3)** und hat an der Stelle $x_W = \frac{7}{3}$ einen Wendepunkt.

Teilaufgabe 1.1 (9 BE)
Bestimmen Sie den Funktionsterm **f(x)**.
[Mögliches Ergebnis: $f(x) = \frac{3}{16}\cdot\left(x^3 - 7\cdot x^2 + 8\cdot x + 16\right)$]

Allgemeiner Funktionsterm: $f(x,a,b,c,d) := a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + c\cdot x + d$

1. Ableitung: $f'(x,a,b,c,d) := \frac{d}{dx}f(x,a,b,c,d) \;=\; 3\cdot a\cdot x^2 + 2\cdot b\cdot x + c$

2. Ableitung: $f''(x,a,b,c,d) := \frac{d}{dx}f'(x,a,b,c,d) \;=\; 2\cdot b + 6\cdot a\cdot x$

Bedingungen einsetzen: Gleichungssystem lösen:

$$L := \begin{pmatrix} f(4,a,b,c,d) = 0 \\ f'(4,a,b,c,d) = 0 \\ f(0,a,b,c,d) = 3 \\ f''\left(\frac{7}{3},a,b,c,d\right) = 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 64\cdot a + 16\cdot b + 4\cdot c + d = 0 \\ 48\cdot a + 8\cdot b + c = 0 \\ d = 3 \\ 14\cdot a + 2\cdot b = 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{16} & -\frac{21}{16} & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

Lösungen herauslesen

$a_1 := L_{1,1}$ $\quad b_1 := L_{1,2}$ $\quad c_1 := L_{1,3}$ $\quad d_1 := L_{1,4}$

$a_1 = \frac{3}{16}$ $\quad b_1 = -\frac{21}{16}$ $\quad c_1 = \frac{3}{2}$ $\quad d_1 = 3$

Konkreter Funktionsterm:

$$f(x,a_1,b_1,c_1,d_1) = \frac{3\cdot x^3}{16} - \frac{21\cdot x^2}{16} + \frac{3\cdot x}{2} + 3$$

Zwischenergebnis: $f(x) := \frac{3}{16}\cdot\left(x^3 - 7\cdot x^2 + 8\cdot x + 16\right)$

Teilaufgabe 1.2 (5 BE)
Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion **f** mit Vielfachheiten.

Nullstelle $x_0 := 4$ ist aus 1.1 bekannt.

Polynomdivision: $p(x) := \dfrac{x^3 - 7\cdot x^2 + 8\cdot x + 16}{x - 4}$ parfrac $\rightarrow x^2 - 3\cdot x - 4$

Weitere Nullstellen: $p(x) = 0 \rightarrow x^2 - 3\cdot x - 4 = 0$ auflösen, $x \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

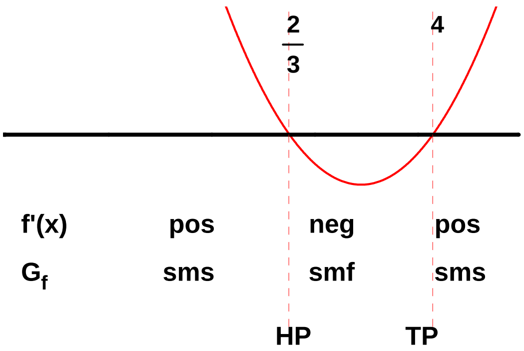
$\Rightarrow$ einfache Nullstelle **(−1 / 0)** und zweifache Nullstelle **(4/0)**

Teilaufgabe 1.3 (5 BE)
Bestimmen Sie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen G_f auf zwei Nachkommastellen genau.

1. Ableitung: $f'(x) := \dfrac{3}{16}\cdot\left(3\cdot x^2 - 14\cdot x + 8\right)$

Horizontale Tangenten: $f'(x) = 0 \rightarrow \dfrac{9\cdot x^2}{16} - \dfrac{21\cdot x}{8} + \dfrac{3}{2} = 0$ auflösen, $x \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Art der Extrempunkte über das Monotonieverhalten:



$f\left(\dfrac{2}{3}\right) = 3.47$

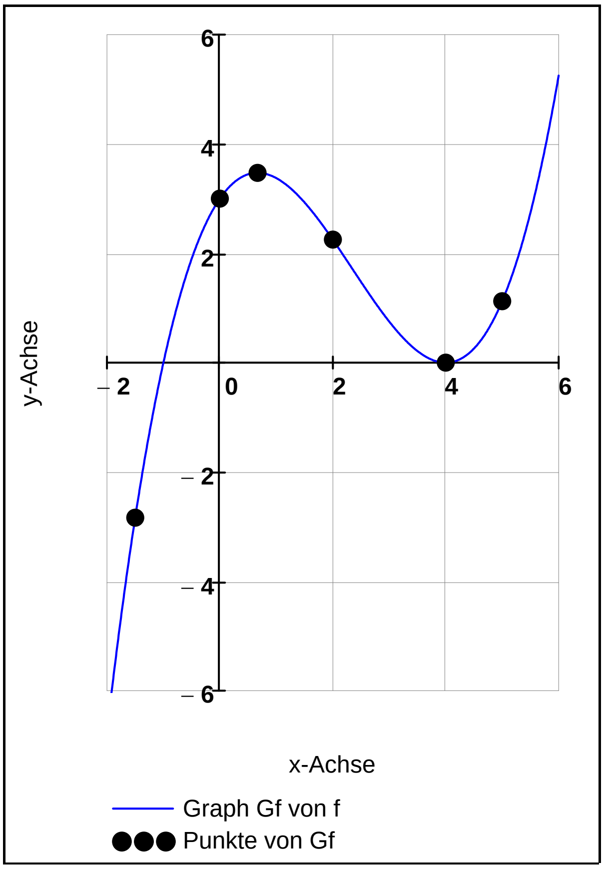
Hochpunkt **H(0.67 / 3.47)**

$f(4) = 0$

Tiefpunkt **T(4 / 0)**

Teilaufgabe 1.4 (4 BE)
Zeichnen Sie den Graphen G_f im Bereich $-1.5 \le x \le 5$ mithilfe vorliegender und weiterer geeigneter Funktionswerte in ein Koordinatensystem.
Maßstab auf beiden Achsen: **1 LE = 1 cm**

$$\text{Tabelle} = \begin{pmatrix} \text{"x-Werte"} & -1.5 & 0 & 0.7 & 2 & 4 & 5 \\ \text{"y-Werte"} & -2.8 & 3 & 3.5 & 2.3 & 0 & 1.1 \end{pmatrix}$$



Teilaufgabe 2.0

Gegeben sind die reellen Funktionen $g_a(x) = \frac{1}{8}\cdot\left(a\cdot x^4 - 4\cdot x^3\right)$ mit $a \in IR \wedge a > 0$.

Der Graph wird mit G_{g_a} bezeichnet.

Teilaufgabe 2.1 (7 BE)

Ermitteln Sie die Koordinaten sämtlicher Punkte mit waagrechter Tangente des Graphen G_{g_a} und deren Art.

Allgemeiner Funktionsterm: $g(x, a) := \frac{1}{8}\cdot\left(a\cdot x^4 - 4\cdot x^3\right)$

1. Ableitung: $g'(x, a) := \frac{1}{8}\cdot\left(4\cdot a\cdot x^3 - 12\cdot x^2\right)$

2. Ableitung: $g''(x, a) := \frac{1}{8}\cdot\left(12\cdot a\cdot x^2 - 24\cdot x\right)$

Horizontale Tangenten: $g'(x, a) = 0 \rightarrow \frac{a\cdot x^3}{2} - \frac{3\cdot x^2}{2} = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{a} \end{pmatrix}$

$g(0, a) = 0$ x = 0 ist zweifache Nullstelle von g', deshalb Terrassenpunkt Te(0/0) von G_{g_a}

$g\left(\frac{3}{a}, a\right) = -\frac{27}{8\cdot a^3}$ $g''\left(\frac{3}{a}, a\right) = \frac{9}{2\cdot a}$ positiv, also ist $TP\left(\frac{3}{a}, -\frac{27}{4\cdot a}\right)$ Tiefpunkt von G_{g_a}

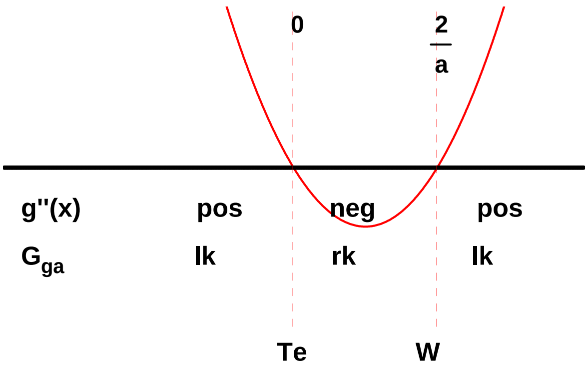
Teilaufgabe 2.2 (7 BE)

Bestimmen Sie die maximalen Krümmungsintervalle und die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen G_{g_a} .

$g''(x, a) = 0 \rightarrow \frac{3\cdot a\cdot x^2}{2} - 3\cdot x = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{a} \end{pmatrix}$

Wendepunkte: $x_{Te} = 0$ $x_W = \frac{2}{a}$

Graph der 2. Ableitung:



Terrassenpunkt:

$Te(0, 0)$

$a := a$

$g\left(\frac{2}{a}, a\right) = -\frac{2}{a^3}$

Wendepunkt

$W\left(\frac{2}{a}, -\frac{2}{a^3}\right)$

Teilaufgabe 2.3 (2 BE)
Berechnen Sie a so, dass die Graphen G_f aus Teilaufgabe 1.1 und G_{g_a} bei $x = 4$ einen gemeinsamen Punkt besitzen.
[Ergebnis: $a = 1$]

$g(4, a) = 0 \rightarrow 32 \cdot a - 32 = 0$ auflösen, $a \rightarrow 1 \quad \Rightarrow \quad a_2 := 1$

Teilaufgabe 2.4 (4 BE)
Zeichnen Sie den Graphen der Funktion g_1 mit $g_1(x) = \frac{1}{8} \cdot x^4 - \frac{1}{2} \cdot x^3$ im Bereich $-1.5 \leq x \leq 4.5$ mit Hilfe vorliegender Ergebnisse in das vorhandene Koordinatensystem ein.

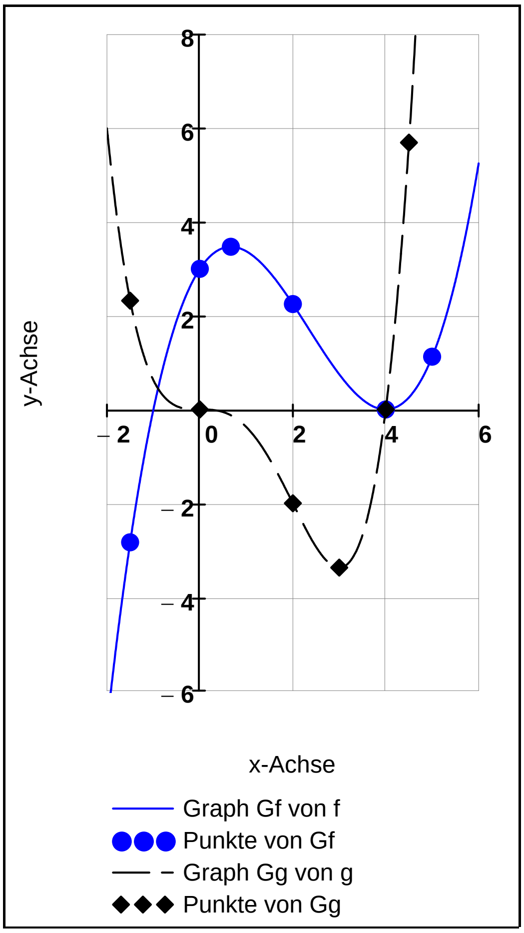
$g(x) := g(x, 1) = \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{2}$

Tiefpunkt: $T\left(3, -\frac{27}{4}\right)$

Terrassenpunkt: $Te(0, 0)$

Wendepunkt: $W(2, -2)$

Nullstelle: $N(4, 0)$



Teilaufgabe 2.5 (5 BE)

Die Graphen G_f und G_{g_1} schließen im 1. und 4. Quadranten zusammen mit der y-Achse ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts.

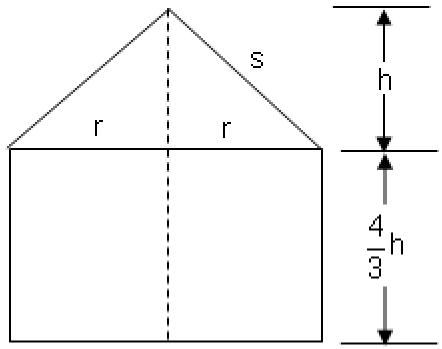
Differenzfunktion: $f(x) - g(x) = \frac{11 \cdot x^3}{16} - \frac{x^4}{8} - \frac{21 \cdot x^2}{16} + \frac{3 \cdot x}{2} + 3$

Stammfunktion: $D(x) := \int f(x) - g(x)\,dx = \frac{11 \cdot x^4}{64} - \frac{x^5}{40} - \frac{7 \cdot x^3}{16} + \frac{3 \cdot x^2}{4} + 3 \cdot x$

Obere Grenze: $D(4) = \frac{72}{5} = 14.4$ Untere Grenze: $D(0) = 0$

Flächenberechnung: $A := D(4) - D(0)$ $A = \frac{72}{5} = 14.4$

Teilaufgabe 3.0
Eine Biogasanlage besteht aus einem zylinderförmigen, oben offenen Grundkörper, das Dach der Höhe h ist kegelförmig (siehe nebenstehende Skizze des Querschnitts). Die Mantellänge s des Kegels beträgt **15 m** . Die folgenden Rechnungen werden ohne Einheiten durchgeführt.



Teilaufgabe 3.1 (6 BE)
Stellen Sie die Maßzahl V des Volumens der gesamten Biogasanlage in Abhängigkeit von der Höhe h dar und geben Sie eine im gegebenen Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge der Funktion $V(h)$ an.

[Mögliches Teilergebnis: $V(h) = \left(375 \cdot h - \frac{5}{3} \cdot h^3\right) \cdot \pi$]

Zielfunktion: $V = V_{Zylinder} + V_{Kegel} = r^2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot h\right) + \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h = \frac{5}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$

Nebenbedingung: $r^2 + h^2 = s^2$ $\quad s = 15 \quad \Rightarrow \quad r^2 + h^2 = 225$

Auflösen nach r: $r^2 + h^2 = 225$ $\quad r = \sqrt{225 - h^2}$ $\quad$ Negative Wurzel nicht sinnvoll

Einsetzen in die Zielfunktion: $V(h) = \frac{5}{3} \cdot \left(225 - h^2\right) \cdot \pi \cdot h$

Zwischenergebnis: $V(h) := \left(375 \cdot h - \frac{5}{3} \cdot h^3\right) \cdot \pi$

Bedingungen:

$h > 0$

$r = 0 \quad h^2 = 225 \quad \Rightarrow \quad h = 15$

Definitionsmenge: $ID =]\,0\,;\,15\,[$

Teilaufgabe 3.2 (6 BE)
Berechnen Se h so, dass das Volumen den absolut größten Wert annimmt. Runden Sie dabei nicht.
Bestimmen Sie auf den nächsten ganzzahligen Wert gerundet den Wert V_{max} des maximalen Volumens.

$$V'(h) := \frac{d}{dh}V(h) = -\pi\cdot\left(5\cdot h^2 - 375\right)$$

Horizontale Tangenten: $V'(h) = 0 \rightarrow -\pi\cdot\left(5\cdot h^2 - 375\right) = 0 \text{ auflösen}, h \rightarrow \begin{pmatrix} 5\cdot\sqrt{3} \\ -5\cdot\sqrt{3} \end{pmatrix}$ nicht definiert

$x_E := 5\cdot\sqrt{3}$ $\qquad x_E = 8.66$ $\qquad$ ist definiert

$$V\left(5\cdot\sqrt{3}\right) = 1250\cdot\pi\cdot\sqrt{3} = 6802$$

Vergleich mit den Randwerten: $\lim\limits_{h \to 0^+} V(h) \rightarrow 0$ $\qquad \lim\limits_{h \to 15^-} V(h) \rightarrow 0$

Darstellung der Zielfunkton in der Prüfung nicht verlangt