Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2010
Mathematik 12 Technik - A II - Lösung

Teilaufgabe 1.0

Gegeben sind die reellen Funktionen f_a mit $f_a(x) = \dfrac{x^2 - a \cdot x + 1}{x^2}$ in der vom Parameter $a \in \mathbb{R}$ unabhängigen Definitionsmenge $\mathbb{D}_{f_a} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Teilaufgabe 1.1 (4 BE)
Ermitteln Sie Anzahl und Lage der Nullstellen der Funktion f_a in Abhängigkeit von a.

Funktionsterm: $f(x, a) := \dfrac{x^2 - a \cdot x + 1}{x^2}$

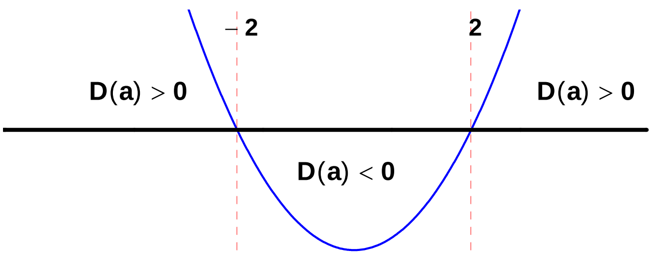
Abrufen des Zählers: $z(x, a) := \text{numer}(f(x, a)) \rightarrow x^2 - a \cdot x + 1$

Nullstellen des Zählers: $z(x, a) = 0 \rightarrow x^2 - a \cdot x + 1 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{a}{2} + \dfrac{\sqrt{(a-2)\cdot(a+2)}}{2} \\ \dfrac{a}{2} - \dfrac{\sqrt{(a-2)\cdot(a+2)}}{2} \end{bmatrix}$

Fallunterscheidung für die Diskriminante: $D(a) := (a - 2)\cdot(a + 2)$

$D(a) = 0 \rightarrow (a - 2)\cdot(a + 2) = 0 \text{ auflösen}, a \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Graph der Determinante



Es gibt zwei einfache Nullstellen für $a \in \,]-\infty; -2[$ und für $a \in \,]2; \infty[$.

$x_1(a) := \dfrac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ $\qquad x_2(a) := \dfrac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$

Es gibt eine zweifache Nullstelle für $a = -2$ und für $a = 2$: $\qquad x_{12}(a) := \dfrac{a}{2}$

Es gibt keine Nullstellen für $-2 < a < 2$.

Teilaufgabe 1.2 **(6 BE)**
Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f_a(x)$ in der Nähe der Definitionslücke sowie für $|x| \rightarrow \infty$. Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten an.

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\overbrace{x^2 - a\cdot x + 1}^{\to 1}}{\underbrace{x^2}_{\to 0^+}} \rightarrow \infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{\overbrace{x^2 - a\cdot x + 1}^{\to 1}}{\underbrace{x^2}_{\to 0^+}} \rightarrow \infty$$

$x = 0$ ist vertikale Asymptote ohne Vorzeichenwechsel

$$\lim_{|x| \to \infty} \frac{x^2 - a\cdot x + 1}{x^2} = \lim_{|x| \to \infty} \left(1 - \underbrace{\frac{a}{x}}_{\to 0^+} + \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0^+}\right) = 1$$

$y_0 := 1$ ist horizontale Asymptote

Teilaufgabe 1.3 **(14 BE)**
Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a die jeweils maximalen Monotonieintervalle der Funktion f_a, geben Sie diejenigen Werte von a an, für die der jeweilige Graph von f_a einen Extrempunkt hat, und ermitteln Sie dessen Art und Lage in Abhängigkeit von a.
Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $a = 0$, $a > 0$ und $a < 0$.
[Mögliches Teilergebnis: $f'_a(x) = \frac{a}{x^2} - \frac{2}{x^3}$]

Zerlegung: $\quad f(x, a) = 1 - \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2}$

Ableitung: $\quad f'(x, a) = \frac{a}{x^2} - \frac{2}{x^3} = \frac{a\cdot x - 2}{x^3}$ $\qquad$ Nullstelle des Zählers: $\quad x_0(a) := \frac{2}{a}$

1. Fall: $a < 0$

		$\frac{2}{a}$	0
Zähler ax-2	pos	neg	neg
Nenner x^3	neg	neg	pos
f'(x)	neg	pos	neg
G_f	smf	sms	smf
		TP	Polstelle

$a := a$

Extrempunkt ist ein Tiefpunkt

$$f\left(\frac{2}{a}, a\right) = 1 - \frac{a^2}{4}$$

$$TP\left(\frac{2}{a}, 1 - \frac{a^2}{4}\right)$$

2. Fall: $\mathbf{a = 0}$

		0	
Zähler -2	**neg**		**neg**
Nenner x^3	**neg**		**pos**
f'(x)	**pos**		**neg**
$\mathbf{G_f}$	**sms**		**smf**
		Polstelle	

Es gibt keinen Extrempunkt.

3. Fall: $\mathbf{a > 0}$

		0		$\frac{2}{a}$	
Zähler ax-2	**neg**		**neg**		**pos**
Nenner x^3	**neg**		**pos**		**pos**
f'(x)	**pos**		**neg**		**pos**
$\mathbf{G_f}$	**sms**		**smf**		**sms**
		Pol		**TP**	

$a := a$

Extrempunkt ist ein Tiefpunkt

$$f\left(\frac{2}{a}, a\right) = 1 - \frac{a^2}{4}$$

$$TP\left(\frac{2}{a}, 1 - \frac{a^2}{4}\right)$$

Teilaufgabe 1.4 (5 BE)
Untersuchen Sie, für welche Werte von a der Graph von f_a einen Wendepunkt besitzt, und bestimmen Sie dessen Koordinaten in Abhängigkeit von a.

2. Ableitung: $f''(x, a) := -\frac{2 \cdot a}{x^3} + \frac{6}{x^4}$ $\qquad f''(x, a) := \frac{-2 \cdot a \cdot x + 6}{x^4}$

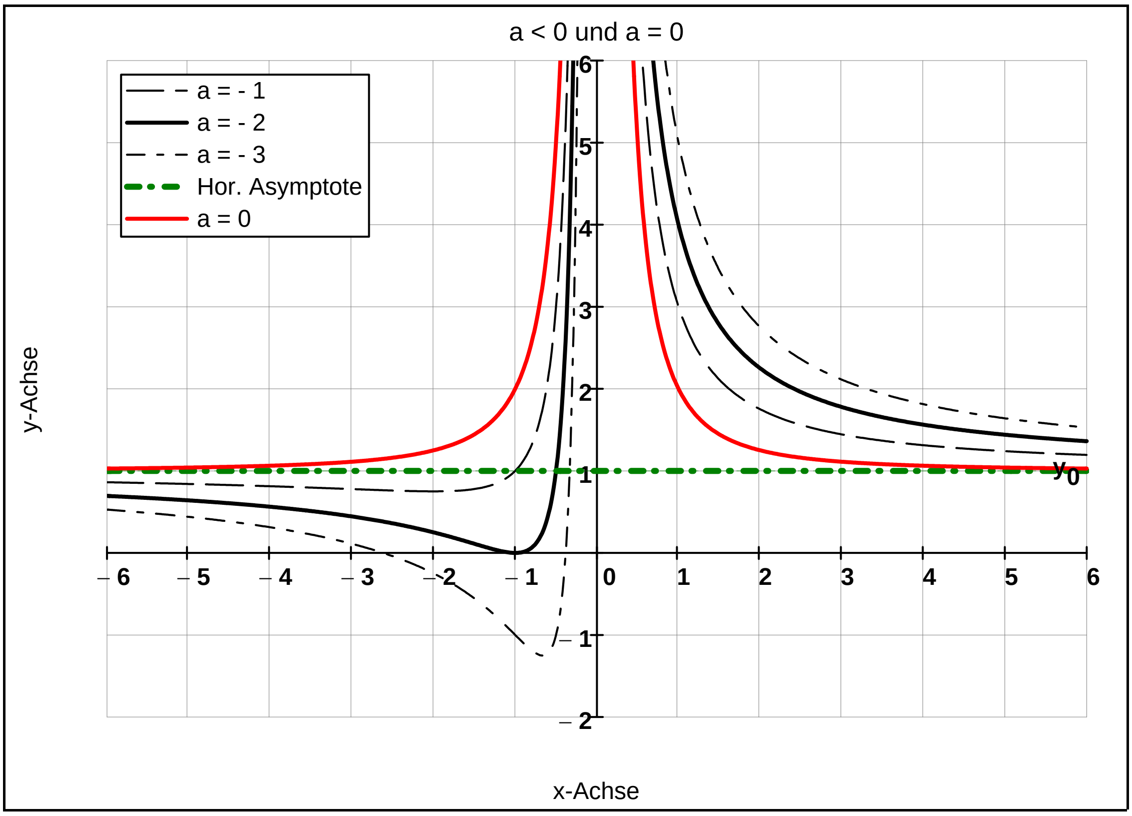
Wendepunktsbedingung: $-2 \cdot a \cdot x + 6 = 0$ auflösen, $x \rightarrow \frac{3}{a}$

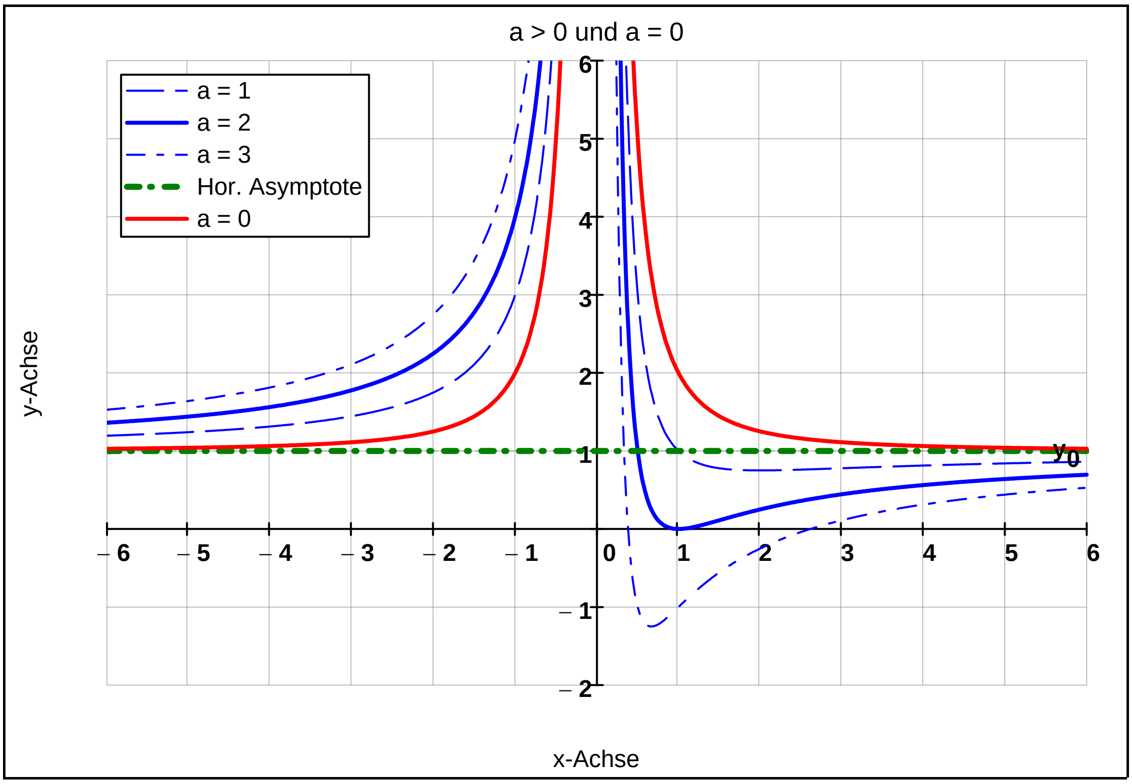
Nullstelle mit Vorzeichenwechsel, also Wendpunkt

$$f\left(\frac{3}{a}, a\right) = 1 - \frac{2 \cdot a^2}{9}$$

Wendepunkt $WP\left(\frac{3}{a}, 1 - \frac{2 \cdot a^2}{9}\right)$ falls $a \neq 0$

Darstellung einzelner typischer Scharkurven in der Prüfung nicht verlangt:

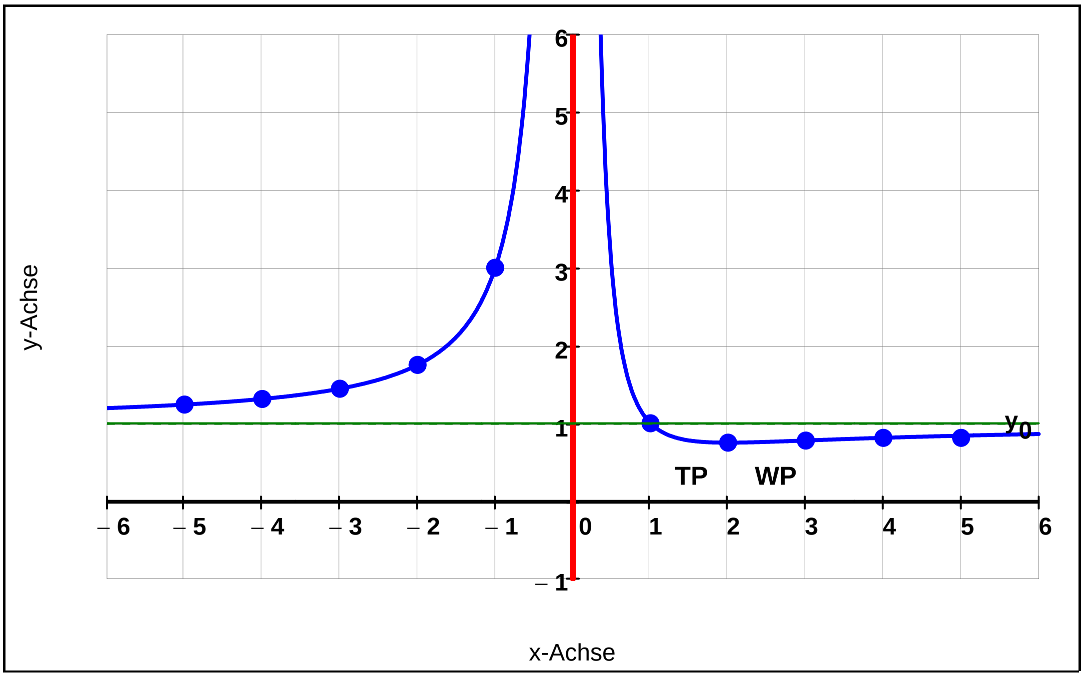




Teilaufgabe 1.5 (4 BE)
Setzen Sie nun **a = 1** und zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte für $-5 \le x \le 5$ den Graphen von f_1 mit seinen Asymptoten in ein kartesisches Koordinatensystem mit dem Maßstab **1 LE = 1 cm**.

Konkreter Funktionsterm: $f_1(x) := f(x, 1) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2}$

Tiefpunkt: $TP\left(2, \dfrac{3}{4}\right)$ Wendepunkt: $WP\left(3, \dfrac{7}{9}\right)$



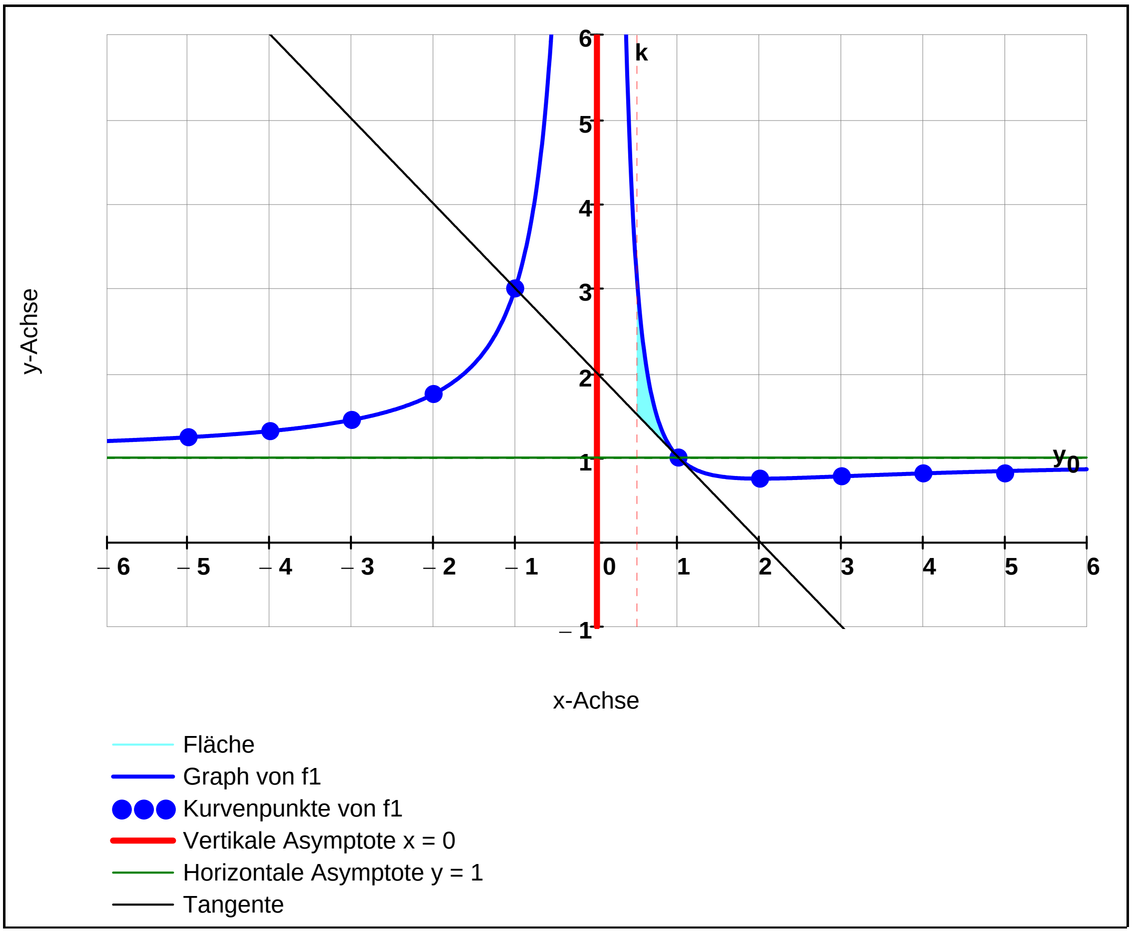
Teilaufgabe 1.6 (3 BE)
Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente t im Punkt $P(1, f_1(1))$ an den Graphen von f_1 und zeichnen Sie die Tangente t in das Diagramm der Aufgabe 1.5 ein.
[Mögliches Teilergebnis: **t:** $y = -x + 2$]

Tangentengleichung: $t(x) := f'(1) \cdot (x - 1) + f_1(1)$ $t(x) = 2 - x$

Zeichnung siehe 1.7

Teilaufgabe 1.7 (5 BE)
Für $0 < k < 1$ schließen die Gerade mit der Gleichung $x = k$, der Graph von f_1 und die Tangente t ein endliches Flächenstück A_k ein.
Markieren Sie dieses Flächenstück für $k = 0.5$ im Diagramm der Aufgabe 1.5 und zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt $A(k)$ der Fläche A_k in Abhängigkeit von k gilt:

$$A(k) = \frac{k^2 + k \cdot \ln(k) + 1}{k} - \frac{k^2 + 3}{2}$$



Aufstellen der Flächenmaßzahlfunktion:

$$A(k) = \int_k^1 (f(x) - t(x))\,dx = \int_k^1 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + x - 2\right) dx$$

Stammfunktion: $$\int \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + x - 2\right) dx = \frac{x^2}{2} - \ln(x) - \frac{1}{x} - x$$

Einsetzen der Grenzen:

$$A(k) = \left(\frac{1}{2} - \ln(1) - 1 - 1\right) - \left(\frac{k^2}{2} - \ln(k) - \frac{1}{k} - k\right) = -\frac{3}{2} - \frac{k^2}{2} + \ln(k) + \frac{1}{k} + k$$

Umformung

$$A(k) = \frac{k^2 + k\cdot\ln(k) + 1}{k} - \frac{k^2+3}{2} = k + \ln(k) + \frac{1}{k} - \frac{k^2}{2} - \frac{3}{2} \qquad \text{q. e. d.}$$

Teilaufgabe 1.8 (6 BE)

Beweisen Sie zunächst, dass gilt: $\lim\limits_{k \to 0^+} (k\cdot\ln(k)) \to 0$. Untersuchen Sie dann, ob der Grenzwert $\lim\limits_{k \to 0^+} A(k)$ existiert, und erklären Sie, was Ihr Ergebnis geometrisch bedeutet.

$$\lim_{k \to 0^+} (\underbrace{k}_{\to 0}\cdot\underbrace{\ln(k)}_{\to -\infty}) = \lim_{k \to 0^+} \frac{\overbrace{\ln(k)}^{\to -\infty}}{\underbrace{\frac{1}{k}}_{\to \infty}} \overset{\text{L'Hosp.}}{=} \lim_{k \to 0^+} \frac{\frac{1}{k}}{\frac{-1}{k^2}} = \lim_{k \to 0^+} (-k) = 0$$

$$\lim_{k \to 0^+} A(k) = \lim_{k \to 0^+} \left(\frac{k^2 + k\cdot\ln(k) + 1}{k} - \frac{k^2+3}{2}\right)$$

Aufteilung des Grenzwertes:

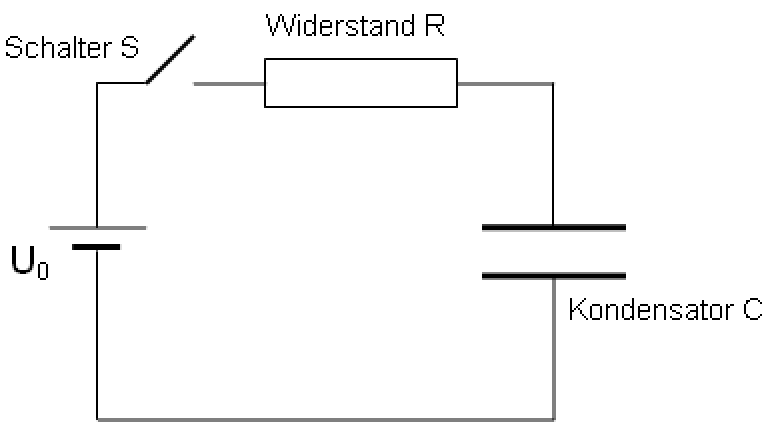
$$\lim_{k \to 0^+} \frac{\overbrace{k^2}^{\to 0} + \overbrace{k\cdot\ln(k)}^{\to 0} + 1}{\underbrace{k}_{\to 0}} \to \infty \qquad\qquad \lim_{k \to 0^+} \left(-\frac{k^2+3}{2}\right) \to -\frac{3}{2}$$

Also gilt: $\lim\limits_{k \to 0^+} A(k) \to \infty$

Die sich nach oben ins Unendliche erstreckende Fläche zwischen y-Achse, Graph von f_1 und Tangente t hat keinen endlichen Flächeninhalt.

Teilaufgabe 2.0
Ein Doppelschicht-Kondensator ist entsprechend der gegebenen Schaltung mit einer Gleichspannungsquelle verbunden, die eine konstante Spannung $U_0 := 5.00 \cdot V$ liefert.

Der Widerstand R des Stromkreises beträgt $10 \cdot \Omega$.
Wird zum Zeitpunkt $t_0 = 0 \cdot s$ der Schalter S geschlossen, beginnt der Kondensator sich aufzuladen. Der zeitliche Verlauf der am Kondensator anliegenden Spannung in Volt (V) wird beschrieben durch die Gleichung $U_C(t) = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\alpha \cdot t}\right)$, wobei $\alpha := 2.50 \cdot 10^{-2} \cdot s^{-1}$



Teilaufgabe 2.1 **(3 BE)**
Berechnen Sie $\lim\limits_{t \to \infty} U_C(t)$ und erklären Sie die Bedeutung dieses Grenzwertes.

$$\text{Grenzwert} \quad \lim_{t \to \infty} U_C(t) = \lim_{t \to \infty} \left[U_0 \cdot \left(1 - \underset{\to\, 0}{e^{-\alpha \cdot t}}\right) \right] \to U_0$$

Nach sehr langer Zeit fällt nahezu die gesamte Spannung am Kondensator ab.

Teilaufgabe 2.2 **(5 BE)**
Erstellen Sie eine Wertetabelle für die Kondensatorspannung $U_C(t)$ sowie für die am Widerstand R anliegende Spannung $U_R(t)$ für $0 \ s \le t \le 100 \ s$ mit einer Schrittweite von $\Delta t = 20 \ s$ und stellen Sie $U_C(t)$ und $U_R(t)$ in einem gemeinsamen Diagramm graphisch dar.
Hinweis: Offensichtlich gilt zu jedem Zeitpunkt $U_0 = U_C + U_R$
Maßstäbe: **1 cm** entspricht 10 s bzw. **1 V**.

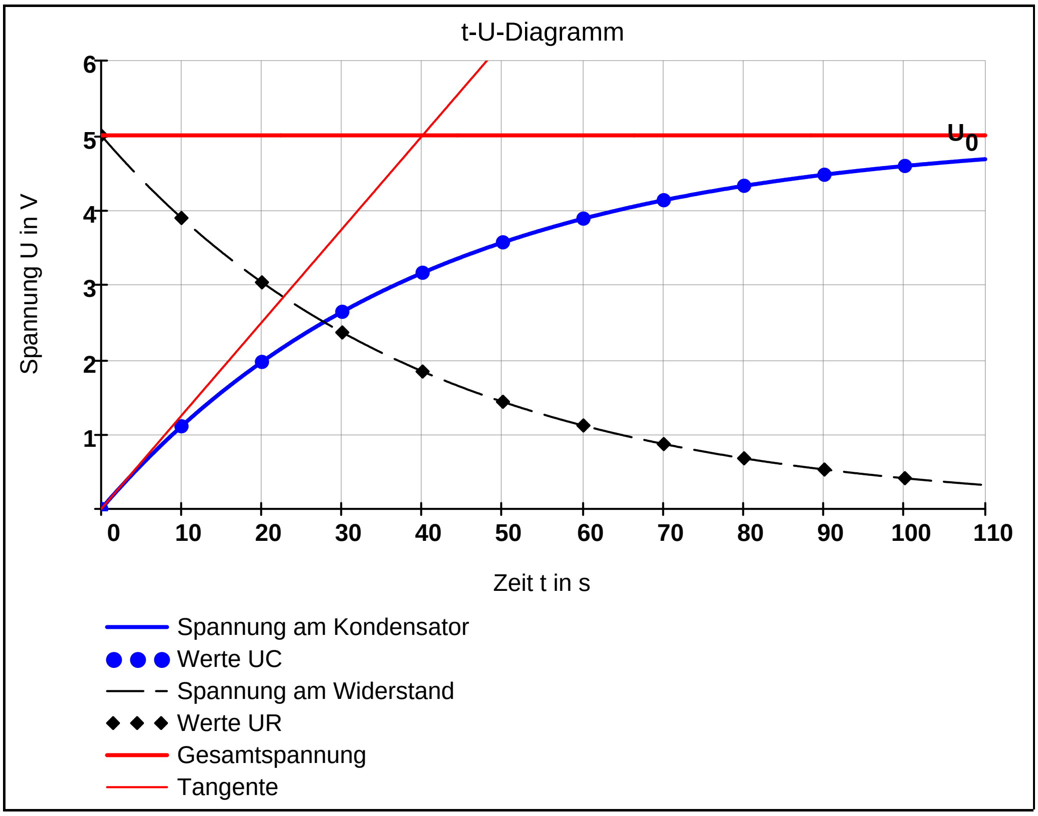
Es gilt: $U_R(\tau) = U_0 - U_C(\tau) = U_0 - U_0 \cdot \left(1 - e^{-\alpha \cdot \tau}\right) = U_0 \cdot e^{-\alpha \cdot \tau}$

$U_R(\tau) := U_0 \cdot e^{-\alpha \cdot \tau}$ $\qquad$ $U_R(\tau) = 5.0 \cdot V \cdot e^{-\frac{0.025 \cdot \tau}{s}}$

$U_C(\tau) := U_0 \cdot \left(1 - e^{-\alpha \cdot \tau}\right)$ $\qquad$ $U_C(\tau) = -5.0 \cdot V \cdot \left(e^{-\frac{0.025 \cdot \tau}{s}} - 1\right)$

Tabelle =

"t in s"	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
"UC in V"	0	1.1	2	2.6	3.2	3.6	3.9	4.1	4.3	4.5	4.6
"UR in V"	5	3.9	3	2.4	1.8	1.4	1.1	0.9	0.7	0.5	0.4



Teilaufgabe 2.3 (5 BE)
Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate der Spannung U_C zur Zeit $t_0 = 0 \cdot s$ sowie ihren Grenzwert für $t \to \infty$. Stellen Sie eine Gleichung der (einseitigen) Tangente an den Graphen von U_C im Ursprung auf und zeichnen Sie diese Tangente in das Diagramm der Aufgabe 2.2 ein.

Änderungsrate: $\frac{d}{d\tau} U_C(\tau) = \frac{0.125 \cdot V \cdot e^{-\frac{0.025 \cdot \tau}{s}}}{s}$

Ableitungsfunktion: $U_T(\tau) := 0.125 \cdot \frac{V}{s} \cdot e^{-\frac{0.025 \cdot \tau}{s}}$

Zum Zeitpunkt $t_0 := 0 \cdot s$: $U_T(0 \cdot s) = 0.125 \cdot \frac{V}{s}$

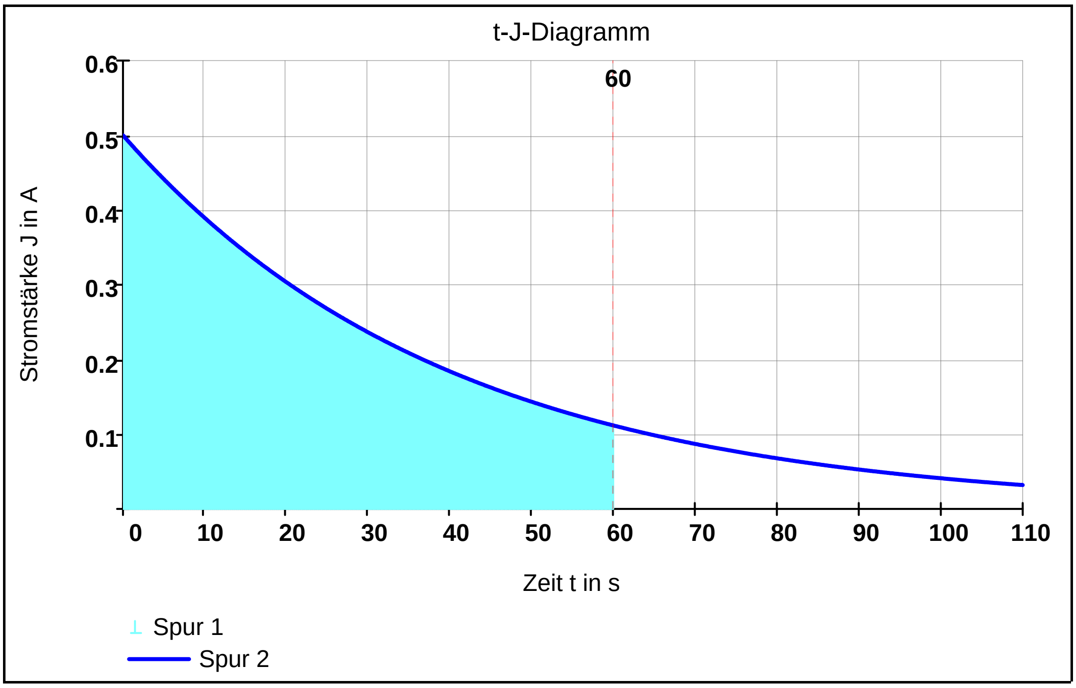
Nach sehr langer Zeit: $\lim_{\tau \to \infty} \left(\frac{0.125 \cdot V \cdot e^{-\frac{0.025 \cdot \tau}{s}}}{s} \right) = 0$

Funktionsterm der Tangente: $g(\tau) := 0.125 \cdot \frac{V}{s} \cdot \tau$

Teilaufgabe 2.4 (3 BE)
In dem gegebenen Stromkreis gilt für die Stromstärke J in Abhängigkeit von der Zeit t die Gleichung: $J(t) = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\alpha \cdot t}$
Stellen Sie in einem neuen Diagramm die Stromstärke J in Abhängigkeit von der Zeit t graphisch dar.

Gegeben: $U_0 = 5V$ $\quad R := 10 \cdot \frac{V}{A}$

Stromstärke: $J(\tau) := \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\alpha \cdot \tau}$ $\quad J(\tau) = 0.5 \cdot A \cdot e^{-\frac{0.025 \cdot \tau}{s}}$



Teilaufgabe 2.5 **(7 BE)**
Die Stromstärke **J** ist definiert als die Ableitung der transportierten Ladung **Q** nach der Zeit **t**:

$$J(t) = \frac{d}{dt}Q(t)$$

Ermitteln Sie eine Gleichung, die den zeitlichen Verlauf der Ladung $Q(t)$ des Kondensators angibt, berechnen Sie $Q(60\ s)$ und veranschaulichen Sie diesen Wert im Diagramm der Aufgabe 2.4.
Berechnen Sie außerdem $\lim_{t \to \infty} Q(t)$.

$$Q(\tau) = \int J(\tau)\,d\tau = \int \frac{U_0}{R}\cdot e^{-\alpha\cdot\tau}\,d\tau = \frac{U_0}{R}\cdot\left(\frac{-1}{\alpha}\right)\cdot e^{-\alpha\cdot\tau} + K$$

Bestimmung der Integrationskonstanten:

$$Q(0\cdot s) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{U_0}{R}\cdot\left(\frac{-1}{\alpha}\right)\cdot 1 + K = 0 \qquad \Rightarrow \qquad K = \frac{U_0}{R\cdot\alpha}$$

$\Rightarrow$ Funktionsterm der Ladung: $Q(\tau) := \frac{U_0}{R\cdot\alpha}\cdot\left(1 - e^{-\alpha\cdot\tau}\right)$

Nach 60 s: $Q(60\cdot s) = 16\cdot A\ s$

Nach sehr langer Zeit: $\lim_{\tau \to \infty} \left[\frac{U_0}{R \cdot \alpha} \cdot \left(1 - e^{-\alpha \cdot \tau}\right) \right] = \frac{U_0}{R \cdot \alpha} = \frac{5 \cdot V}{10 \cdot \frac{V}{A} \cdot 2.50 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{1}{s}} = 20 \cdot A \cdot s$

Darstellung der Ladung als Funktion (in der Prüfung nicht verlangt):