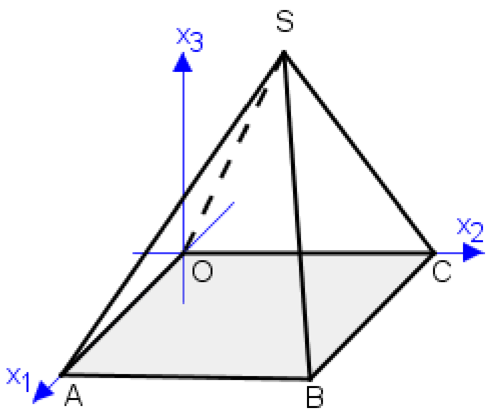
Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2010
Mathematik 12 Technik - B I - Lösung

Vor dem Louvre, dem berühmten Pariser Kunstmuseum, wurde im Jahre 1989 eine Glaspyramide erbaut, welche den unterirdisch liegenden Haupteingang beherbergt. Diese Pyramide wurde der Cheops-Pyramide nachempfunden.
Die Seitenlängen der quadratischen, nach unten offenen Grundfläche beträgt **35 m** und die Spitze liegt lotrecht über deren Mittelpunkt in einer Höhe von **22 m**.
In einem geeignet gewählten kartesischen Koordinatensystem (1 LE = 1 m) sind der Ursprung O und der Punkt **B(35/35/0)** zwei Eckpunkte der in der x_1-x_2-Ebene liegenden horizontalen Grundfläche. Die Skizze zeigt die prinzipielle Lage der Pyramide.



Teilaufgabe 1 **(2 BE)**
Geben Sie die Koordinaten der beiden Eckpunkte A und C sowie die Spitze S an.

Ortsvektor zum Punkt A: $\mathbf{a} := \begin{pmatrix} 35 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{A} := \mathbf{a}^T \quad \mathbf{A} \rightarrow (35 \quad 0 \quad 0)$

Ortsvektor zum Punkt C: $\mathbf{c} := \begin{pmatrix} 0 \\ 35 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{C} := \mathbf{c}^T \quad \mathbf{C} \rightarrow (0 \quad 35 \quad 0)$

Ortsvektor zum Punkt S: $\mathbf{s} := \begin{pmatrix} \frac{35}{2} \\ \frac{35}{2} \\ 22 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{S} := \mathbf{s}^T \quad \mathbf{S} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{35}{2} & \frac{35}{2} & 22 \end{pmatrix}$

Teilaufgabe 2 **(4 BE)**
Bestimmen Sie eine Parameter- und eine Normalengleichung der Ebene **E**, in der die Punkte **A**, **B** und **S** liegen.

Koordinaten vom Punkt B: $\mathbf{B} := (35 \quad 35 \quad 0)$

Ortsvektor zum Punkt B: $\mathbf{b} := \mathbf{B}^T \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 35 \\ 35 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ebene E in Parameterdarstellung:

$$x_E(\lambda,\mu) := a + \lambda\cdot(b-a) + \mu\cdot(s-a) \qquad x_E(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} 35 - \frac{35\cdot\mu}{2} \\ \frac{35\cdot\mu}{2} + 35\cdot\lambda \\ 22\cdot\mu \end{pmatrix}$$

Normalenvektor: vereinfacht:

$$n_E := (b-a)\times(s-a) \qquad n_E = \begin{pmatrix} 770 \\ 0 \\ 612.5 \end{pmatrix} \qquad n_E\cdot\frac{1}{17.5} = \begin{pmatrix} 44 \\ 0 \\ 35 \end{pmatrix} \qquad \text{neu:} \quad n_E := \begin{pmatrix} 44 \\ 0 \\ 35 \end{pmatrix}$$

Ebene E in Normalenform:

$$\begin{pmatrix} 44 \\ 0 \\ 35 \end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 35 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = 0$$

Umwandlung in Koordinatenform:

$$E(x_1,x_2,x_3) := \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 35 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} 44 \\ 0 \\ 35 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow 44\cdot x_1 + 35\cdot x_3 - 1540 = 0$$

$$E(x_1,x_2,x_3) \rightarrow 44\cdot x_1 + 35\cdot x_3 - 1540 = 0$$

Teilaufgabe 3 (4 BE)
Berechnen Sie den Neigungswinkel einer Seitenfläche gegenüber der Grundfläche.

Der Winkel zwischen zwei Ebenen entspricht dem Winkel zwischen den Normalenvektoren.

Normalenvektor der Grundfläche: $n_{12} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |n_{12}| = 1 \qquad |n_E| = 56$

Ansatz für den Winkel: $\varphi := \mathrm{acos}\left(\frac{n_{12}\cdot n_E}{|n_{12}|\cdot|n_E|}\right) \qquad \varphi = 51.50\cdot°$

Teilaufgabe 4 (3 BE)
Berechnen Sie den Flächeninhalt einer der vier gläsernen Seitenflächen.

Verbindungsvektoren: $\mathbf{b}-\mathbf{a}=\begin{pmatrix}0\\35\\0\end{pmatrix}$ $\quad\mathbf{s}-\mathbf{a}=\begin{pmatrix}-17.5\\17.5\\22\end{pmatrix}$

Vektorprodukt: $(\mathbf{b}-\mathbf{a})\times(\mathbf{s}-\mathbf{a})=\begin{pmatrix}770\\0\\612.5\end{pmatrix}$

Fläche: $\mathbf{A}:=\frac{1}{2}\cdot\left|(\mathbf{b}-\mathbf{a})\times(\mathbf{s}-\mathbf{a})\right|$ $\quad\mathbf{A}=492$

Teilaufgabe 5.0
An einem im Punkt S befestigten Seil wurde eine nach allen Seiten gleichmäßig Licht abstrahlende Lampe so aufgehängt, dass die Lichtstrahlen im Schwerpunkt jeder Seitenfläche senkrecht auftreffen.

Teilaufgabe 5.1 (7 BE)
Zeigen Sie, dass der Punkt $\mathbf{M}\left(\frac{175}{6},\frac{35}{2},\frac{22}{3}\right)$ der Schwerpunkt des Dreiecks ABS ist, und zeigen Sie, dass der Aufhängepunkt P der als punktförmig angenommenen Lampe unterhalb der offenen Grundfläche OABC liegt.

Schwerpunkt M des Dreiecks aus FS:

$\mathbf{m}:=\frac{1}{3}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{s})$ $\quad\mathbf{m}=\begin{pmatrix}\frac{175}{6}\\\frac{35}{2}\\\frac{22}{3}\end{pmatrix}$ $\quad\mathbf{m}=\begin{pmatrix}29.167\\17.5\\7.333\end{pmatrix}$

Koordinaten Punkt M: $\mathbf{M}:=\mathbf{m}^{T}$ $\quad\mathbf{M}\rightarrow\begin{pmatrix}\frac{175}{6}&\frac{35}{2}&\frac{22}{3}\end{pmatrix}$

Lösungsstrategie zur Bestimmung des Punktes P:
- Der Punkt P liegt auf der Hilfsgeraden h durch M, die senkrecht auf der Ebene E durch A, B und S (Seitenfläche) steht.
- Der Punkt P liegt senkrecht unter S, also in einer Hilfsebenebene H senkrecht zur x_1-Achse durch S.
- P ist also der Schnittpunkt $h\cap H$.

Normalenvektor der Ebene E:

$$n_E = \begin{pmatrix} 44 \\ 0 \\ 35 \end{pmatrix}$$

Schwerpunkt des Dreiecks ABS:

$$m = \begin{pmatrix} \frac{175}{6} \\ \frac{35}{2} \\ \frac{22}{3} \end{pmatrix}$$

Hilfsgerade h durch M senkrecht zu E:

$$h(\tau) := m + \tau \cdot n_E \qquad h(\tau) = \begin{pmatrix} 44 \cdot \tau + \frac{175}{6} \\ \frac{35}{2} \\ 35 \cdot \tau + \frac{22}{3} \end{pmatrix}$$

Hilfsebene H senkrecht zur x_1-Achse durch S:

$$n_H := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad s = \begin{pmatrix} \frac{35}{2} \\ \frac{35}{2} \\ 22 \end{pmatrix}$$

Normalenform für H:

$$\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - s \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow x_1 - \frac{35}{2} = 0$$

$$h \cap H: \qquad \tau_1 := 44 \cdot \tau + \frac{175}{6} - \frac{35}{2} = 0 \text{ auflösen}, \tau \rightarrow -\frac{35}{132}$$

Einsetzen in Geradengleichung:

$$p := h(\tau_1) = \begin{pmatrix} \frac{35}{2} \\ \frac{35}{2} \\ -\frac{257}{132} \end{pmatrix} \qquad p = \begin{pmatrix} 17.5 \\ 17.5 \\ -1.947 \end{pmatrix}$$

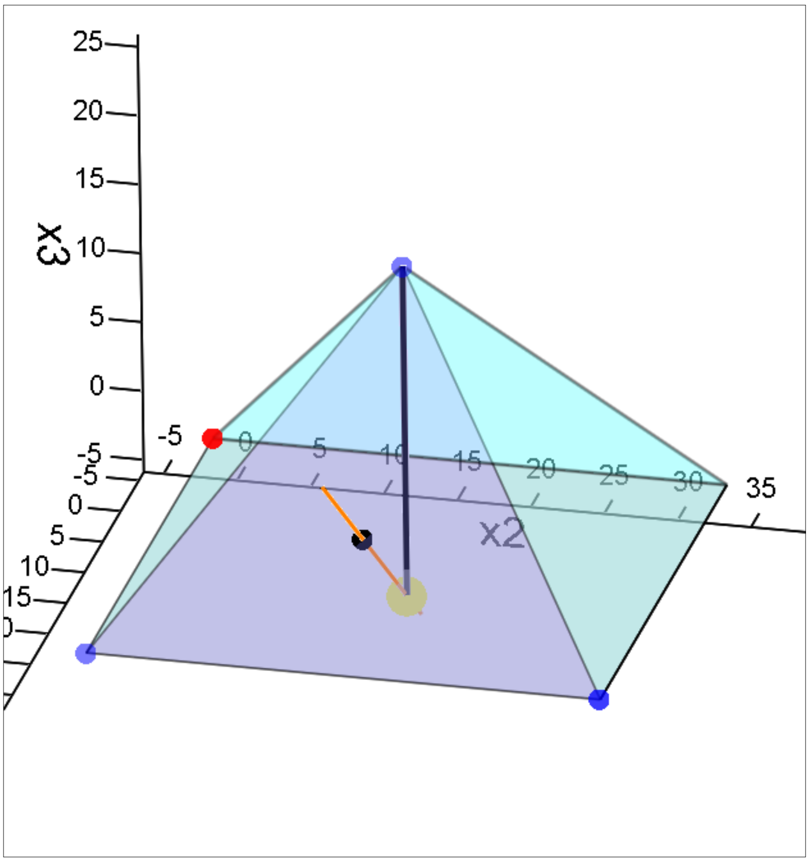
Koordinaten von P:

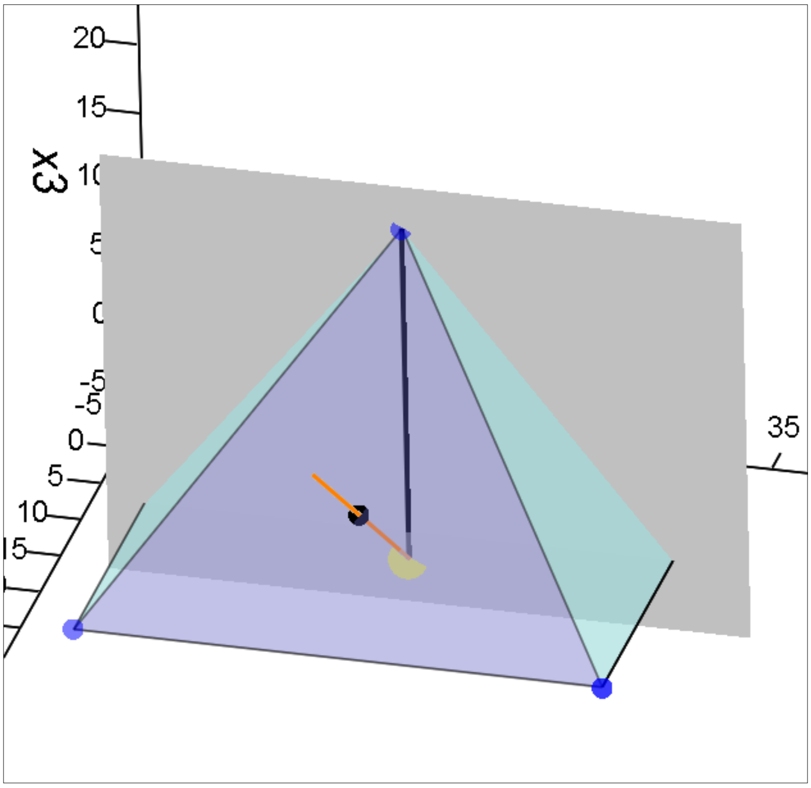
$$P := p^T \qquad P \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{35}{2} & \frac{35}{2} & -\frac{257}{132} \end{pmatrix}$$

Die x_3-Koordinate des Punktes P ist negativ, P liegt also unterhalb der x_1-x_2-Ebene.

Graphische Darstellung (in der Prüfung nicht verlangt)

Darstellung der Pyramide





Koordinatenursprung: rot
Grundfläche OABC: grau
Dreieck ABC: blau
Ebene E: blau
Seitenflächen: türkis
Schwerpunkt M: schwarz
Punkt P: gelb
Hilfsgerade h: orange

zusätzlich in der
2. Darstellung:
Hilfsebene H: grau

Teilaufgabe 5.2 (5 BE)
Die Position der Lampe kann für spezielle Lichteffekte durch Veränderung der Seillänge verändert werden. Berechnen Sie den Abstand der Lampe von der Seitenkante OS, wenn die Lampe auf der Höhe der x_1-x_2-Ebene angebracht wird.

Neue Position von P: $P_{neu} := \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad P_{neu} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{35}{2} & \frac{35}{2} & 0 \end{pmatrix}$

Ortsvektor: $p_{neu} := P_{neu}^T$ $\quad p_{neu} = \begin{pmatrix} \frac{35}{2} \\ \frac{35}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad p_{neu} = \begin{pmatrix} 17.5 \\ 17.5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Gerade durch O und S: $g_{OS}(\sigma) := \sigma \cdot s$ $\quad g_{OS}(\sigma) = \begin{pmatrix} \frac{35 \cdot \sigma}{2} \\ \frac{35 \cdot \sigma}{2} \\ 22 \cdot \sigma \end{pmatrix}$

Der Abstand des Punktes P von OS wird über den Lotfußpunkt L $\in g_{OS}$ ausgerechnet:

$l(\sigma) := g_{OS}(\sigma)$

Ansatz $g_{OS} \perp g_{PL}$: $\quad \left(p_{neu} - l(\sigma)\right) \cdot s = 0$

$$\sigma_1 := \left[\begin{pmatrix} \frac{35}{2} \\ \frac{35}{2} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{35 \cdot \sigma}{2} \\ \frac{35 \cdot \sigma}{2} \\ 22 \cdot \sigma \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} \frac{35}{2} \\ \frac{35}{2} \\ 22 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \frac{1225}{2} - \frac{2193 \cdot \sigma}{2} = 0 \text{ auflösen}, \sigma \rightarrow \frac{1225}{2193}$$

Lotfußpunkt:; $l := l(\sigma_1)$ $\quad l = \begin{pmatrix} \frac{42875}{4386} \\ \frac{42875}{4386} \\ \frac{26950}{2193} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.775 \\ 9.775 \\ 12.289 \end{pmatrix}$

$L := l^T \quad L \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{42875}{4386} & \frac{42875}{4386} & \frac{26950}{2193} \end{pmatrix}$

Abstand: $d := \left| l - p_{neu} \right|$ $\quad d := \left| \begin{pmatrix} 9.775 \\ 9.775 \\ 12.289 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 17.5 \\ 17.5 \\ 0 \end{pmatrix} \right|$ $\quad d = 16.443$

Teilaufgabe 6 **(5 BE)**
Vor der Pyramide steht ein senkrechter Fahnenmast, dessen Spitze **F** die Koordinaten **F(40 , 30 , 8)** besitzt.

Paralleles Sonnenlicht mit dem Richtungsvektor $\vec{l} = \begin{pmatrix} -2.5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ erzeugt auf der Seitenfläche **ABS**

der Pyramide den Schattenpunkt F_S der Spitze **F**.

Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Punktes F_S .

Definitionen: $f := \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\quad l := \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Sonnenstrahl: $s(\tau) := f + \tau \cdot l$ $\quad s(\tau) = \begin{pmatrix} 40 - \frac{5 \cdot \tau}{2} \\ 30 - 3 \cdot \tau \\ 8 - 2 \cdot \tau \end{pmatrix}$

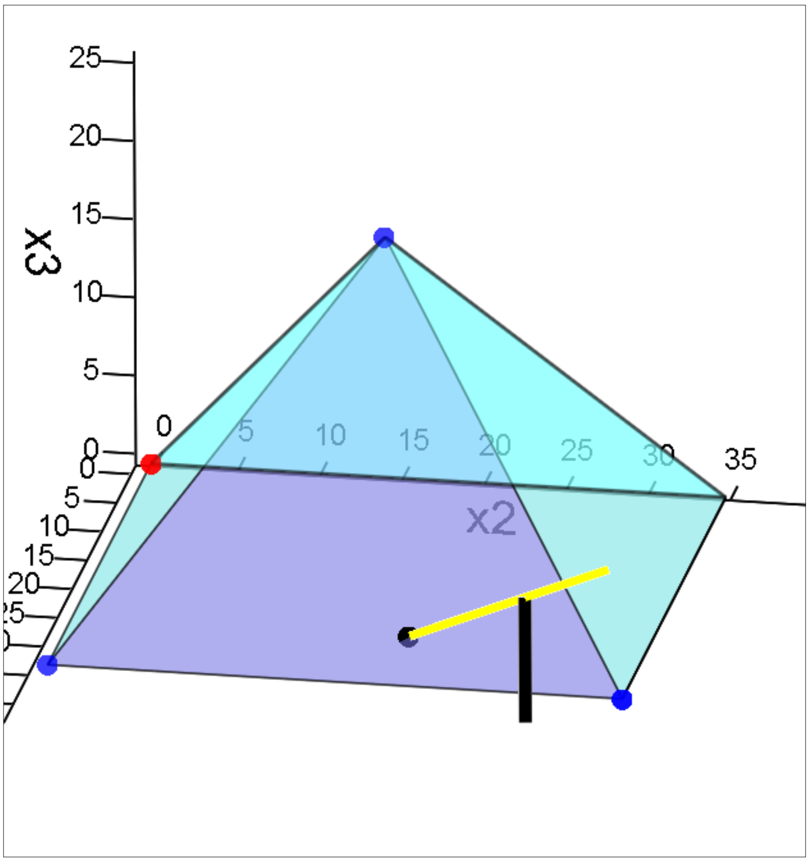
Die Seitenfläche ABS liegt in der Ebene
$E(x_1, x_2, x_3) \rightarrow 44 \cdot x_1 + 35 \cdot x_3 - 1540 = 0$

s ∩ E: $\tau_S := E(s(\tau)_1, s(\tau)_2, s(\tau)_3) \rightarrow 500 - 180 \cdot \tau = 0$ auflösen $, \tau \rightarrow \frac{25}{9}$

Schattenpunkt F_S
:

$f_S := s(\tau_S)$ $\quad f_S = \begin{pmatrix} \frac{595}{18} \\ \frac{65}{3} \\ \frac{22}{9} \end{pmatrix}$ $\quad F_S := f_S^T$ $\quad F_S \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{595}{18} & \frac{65}{3} & \frac{22}{9} \end{pmatrix}$

Darstellung der Pyramide



Koordinatenursprung: rot
Grundfläche OABC: grau
Dreieck ABC: blau
Ebene E: blau
Seitenflächen: türkis
Fahnenmast: schwarz
Sonnenstrahl s: gelb
Schattenpunkt F_S: schwarz