Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2010
Mathematik 13 Nichttechnik - A I - Lösung

Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist die Funktion $f(x) := \frac{x^2 - x}{2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 3}$ in der maximalen Definitionsmenge $D_f \subset \mathbb{R}$.

Teilaufgabe 1.1 (8 BE)
Bestimmen Sie D_f und die Nullstelle von f und geben Sie Art der Definitionslücken von f an.

Nennerpolynom: $n(x) := \mathbf{denom}(f(x)) \rightarrow 2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 3$

Nennernullstellen: $n(x) = 0 \rightarrow 2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 3 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \{1 ;\ 1.5\}$

Zählerpolynom: $z(x) := \mathbf{numer}(f(x)) \rightarrow x^2 - x$

Zählernullstellen: $z(x) = 0 \rightarrow x^2 - x = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ nicht definiert

Nullstelle: **N(0/0)**

Art der Def.lücken:

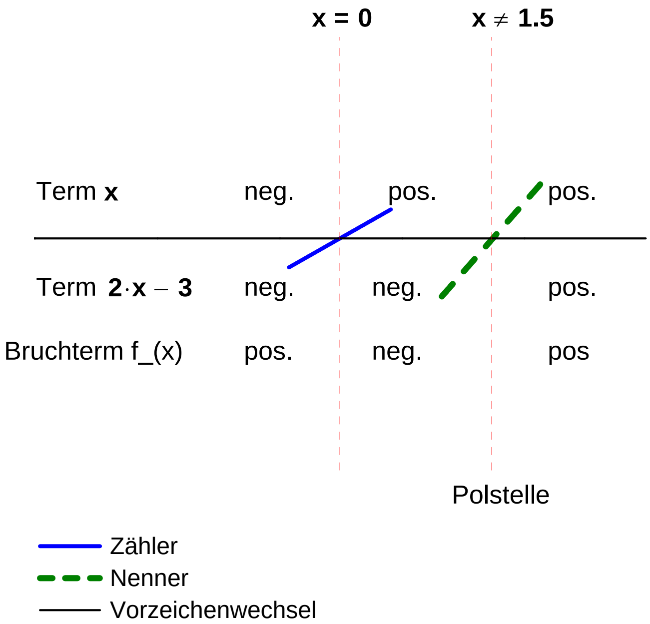
$x = 1$ stetig behebbare Def.lücke

$x = \frac{3}{2}$ Postelle 1.Ordnung

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)

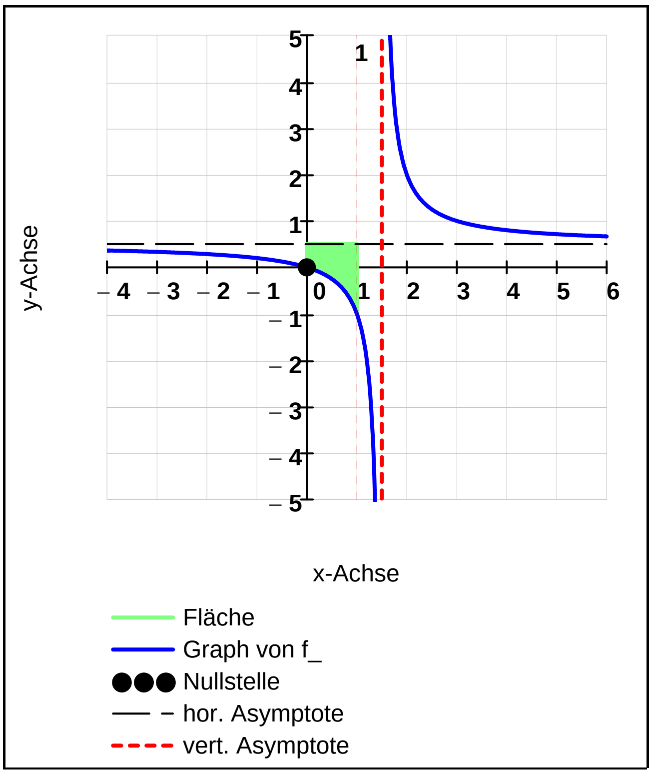
Zeigen Sie, dass die Funktion $f\_(x) := \frac{x}{2 \cdot x - 3}$ mit $D_{f\_} = \mathbb{R} \setminus \{1{,}5\}$ die stetige Fortsetzung von f ist, und ermitteln Sie die Intervalle, für die gilt: $f\_(x) > 0$ bzw. $f\_(x) < 0$.

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 3} = \frac{x \cdot (x - 1)}{2 \cdot (x - 1) \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right)} = \frac{x}{2 \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right)} = \frac{x}{2 \cdot x - 3}$$



Teilaufgabe 1.3 (5 BE)
Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen von **f_** an, zeichnen Sie die Asymptoten in ein Koordinatensystem und skizzieren Sie mithilfe der bisherigen Ergebnisse den Graphen $G_{f\_}$ von **f_** in das Koordinatensystem.

$x = 1.5$ vertikale Asymptote mit VZW $\qquad$ $x = \frac{1}{2}$ horizontale Asymptote Asymptote



Teilaufgabe 1.4 (5 BE)

Zeigen Sie, dass sich der Term von $f\_$ in der Form $f\_(x) = \frac{1}{2} + \frac{1.5}{2 \cdot x - 3}$ darstellen lässt und berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts der Fläche, die von der y-Achse, den Geraden $y = \frac{1}{2}$ und $x = 1$ und $G_{f\_}$ begrenzt wird.

Polynomdivision: $f\_(x) = \frac{x}{2 \cdot x - 3}$ parfrac $= \frac{3}{2 \cdot (2 \cdot x - 3)} + \frac{1}{2}$

Stammfunktion: $F(x) = \int -\frac{1.5}{2 \cdot x - 3} \, dx = -0.75 \cdot \ln(|2 \cdot x - 3|)$

$$A = \int_0^1 -\frac{1.5}{2 \cdot x - 3} \, dx = -(F(1) - F(0)) = -(0 - 0.824) = 0.824$$

Teilaufgabe 2.0

Nun ist die Funktion $g(x) := \ln\left(\frac{x}{2 \cdot x - 3}\right)$ in der maximalen Definitionsmenge $D_f \subset IR$ gegeben.

Ihr Graph ist G_g.

Teilaufgabe 2.1 (2 BE)

Begründen Sie gegebenenfalls unter Verwendung von Aufgabe 1.2, dass gilt: $D_g = IR \setminus [\,0\,;\,1{,}5\,]$

$\frac{x}{2 \cdot x - 3} > 0$ auflösen, $x \;\rightarrow x < 0 \lor \frac{3}{2} < x$ $\quad\Rightarrow\quad$ $D =]\,-\infty\,;\,0\,[\;\cup\;]\,1.5\,;\,\infty\,[$

$\Rightarrow\quad D = IR \setminus [\,0\,;\,1.5\,]$

Teilaufgabe 2.2 (4 BE)

Untersuchen Sie das Verhalten von g an den Rändern von D_g.

I. H.

$$\lim_{x \to -\infty} \ln\left(\frac{\overset{\overset{-\infty}{\uparrow}}{x}}{\underset{\underset{-\infty}{\downarrow}}{2 \cdot x - 3}}\right) = \lim_{x \to -\infty} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

Ebenso:

$$\lim_{x \to \infty} \ln\left(\frac{x}{2 \cdot x - 3}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\lim_{x \to 0^-} \ln\left(\underset{\underset{0^+}{\downarrow}}{\frac{x}{2 \cdot x - 3}}\right) \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \to 1.5^+} \ln\left(\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{\frac{x}{2 \cdot x - 3}}\right) \rightarrow \infty$$

Teilaufgabe 2.3 (4 BE)
Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten von G_g an und berechnen Sie die Nullstelle von g.

$y = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -0.69$ horizontale Asymptote:

$x = 0$ vertikale Asymptote:

$x = 1.5$ vertikale Asymptote:

$g(x) = 0 \rightarrow \ln\left(\frac{x}{2 \cdot x - 3}\right) = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow 3$ Nullstelle: **N (3/0)**

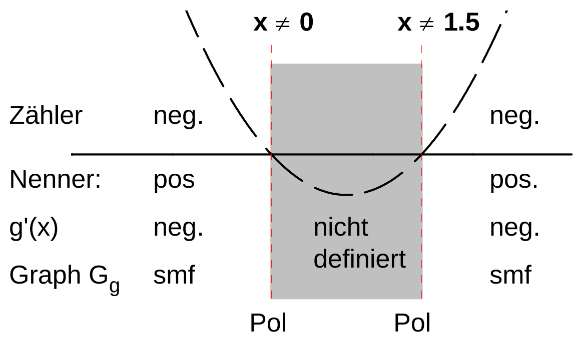
Teilaufgabe 2.4 (7 BE)
Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle von G_g.

[Zur Kontrolle: $g'(x) = \frac{-3}{x \cdot (2 \cdot x - 3)}$]

Ableitung:

$$g'(x) = \frac{2 \cdot x - 3}{x} \cdot \frac{(2 \cdot x - 3) \cdot 1 - x \cdot 2}{(2 \cdot x - 3)^2} = \frac{2 \cdot x - 3 - 2 \cdot x}{x(2 \cdot x - 3)} = \frac{-3}{x \cdot (2 \cdot x - 3)} = \frac{-3}{x \cdot (2 \cdot x - 3)}$$

Nennerfunktion: $n(x) := x \cdot (2 \cdot x - 3)$



Teilaufgabe 3.0
Für die erprobung eines neuen Medikaments wird im Labor die Entwicklung einer Pilzkultur in einer Nährlösung unter dem Einfluss des Medikaments beobachtet. Man stellt fest, dass sich die Anzahl N der Pilze in Abhängigkeit von der Zeit t in <u>Stunden</u> (h) durch folgende mathematische Funktion näherungsweise beschreiben lässt:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{\left(3 \cdot t - t^2\right)} \quad \text{mit } t \geq 0$$

Dabei bedeutet N_0 die anfänglich vorhandene Anzahl an Pilzen.

Für die Rechnungen kann auf die Verwendung von Benennungen verzichtet werden.

Teilaufgabe 3.1 (2 BE)
Die erste Zählung ergibt nach 30 Minuten 1745 Pilze. Bestimmen Sie damit die Anfangszahl N_0.

(Ergebnis: $N_0 = 500$)

$$1745 = N_0 \cdot e^{3 \cdot 0.5 - (0.5)^2} = N_0 \cdot e^{1.25} \quad \Rightarrow \quad N_0 := \frac{1745}{e^{1.25}} \qquad N_0 = 499.951$$

$$\Rightarrow \quad N_0 := 500$$

Teilaufgabe 3.2 (5 BE)
Berechnen Sie den Zeitpunkt, an dem die maximale Anzahl von Pilzen vorhanden ist und bestimmen Sie diese maximale Anzahl.

(Zur Kontrolle: $\frac{d}{dt}N(t) = 500 \cdot (3 - 2 \cdot t) \cdot e^{\left(3 \cdot t - t^2\right)}$)

Funktionsterm: $N(t) := N_0 \cdot e^{\left(3 \cdot t - t^2\right)}$

Ableitung: $N'(t) := \frac{d}{dt}N(t) \qquad N'(t) = 500 \cdot (3 - 2 \cdot t) \cdot e^{3 \cdot t - t^2}$

Hor. Tangenten: $N'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot t - 3 = 0$ auflösen, $t \rightarrow \frac{3}{2}$

Faktorfunktion: $h(t) := 2 \cdot t - 3$

Graph von h ist eine fallende Gerade, Vorzeichenwechsel von Plus nach Minus, d.h. das Extremum ist ein rel. Maximum.

$$N\left(\frac{3}{2}\right) = 4.744 \times 10^3 \qquad HP\left(\frac{3}{2}, 4744\right)$$

Teilaufgabe 3.3 (6 BE)
Berechnen Sie den Zeitpunkt t_1, an dem die Kultur am stärksten wächst und den Zeitpunkt t_2, an dem die Kultur am stärksten abnimmt und geben Sie die Bedeutung dieser beiden Zeitpunkte für den Graphen dieser beiden Zeitpunkte für den Graphen der Funktion **N** an.

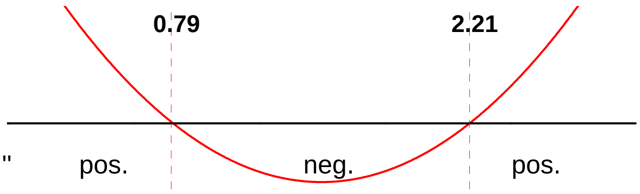
2. Ableitung: $$N''(t) = 500\cdot\left[-2\cdot e^{3\cdot t-t^2} + (3-2\cdot t)^2\cdot e^{3\cdot t-t^2}\right] = 500\cdot e^{3\cdot t-t^2}\cdot\left[-2+(3-2\cdot t)^2\right]$$

Wendepunkte: $$N''(t) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad -2+(3-2\cdot t)^2 = 0 \text{ auflösen}, t \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.21 \\ 0.79 \end{pmatrix}$$

Krümmungsverhalten: $$k(t) := -2+(3-2\cdot t)^2$$

Vorzeichen der 2. Ableitung

0.79 2.21



N''	pos.		neg.		pos.
Graph von N	links-gekrümmt		rechts-gekrümmt		links-gekrümmt
Graph von N'	sms		smf		sms
		Hochpunkt von N'		Tiefpunkt von N'	

stärkster Anstieg bei **t = 0.79**

stärkste Abnahme bei **t = 2.21**

Die beiden Zeitpunkte sind die Wendepunkte des Graphen der Funktion N(t).

Teilaufgabe 3.4 (4 BE)
Bestimmen Sie den Zeitpunkt, ab dem die Pilzkultur völlig abgestorben ist, das heißt weniger als ein Pilz vorhanden ist.

$$500\cdot e^{\left(3\cdot t-t^2\right)} < 1 \quad\Leftrightarrow\quad e^{\left(3\cdot t-t^2\right)} < 0.002 \quad\Leftrightarrow\quad 3\cdot t - t^2 < \ln(0.002)$$

Nullstellen: $$-t^2+3\cdot t-\ln(0.002) = 0 \;\left|\begin{array}{l} \text{auflösen}, t \\ \text{Gleitkommazahl}, 3 \end{array}\right. \rightarrow \begin{pmatrix} 4.41 \\ -1.41 \end{pmatrix}$$ keine Lösung

Für den Zeitpunkt $t > 4.41$ ist die Pilzkultur ausgestorben:

Teilaufgabe 3.5 (4 BE)
Skizzieren Sie den Graphen von N unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem.
(Maßstab: 1 cm entspricht 0,5 h; 1cm entspricht 1000 Pilze)