Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2010
Mathematik 13 Nichttechnik - A II - Lösung

Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist die Funktion **f** mit $f(x) := \left(x^2 - 2\cdot x + 1\right)\cdot e^{2\cdot x}$, $D_f = \mathbb{R}$. Ihr Graph ist G_f.

Teilaufgabe 1.1 **(8 BE)**

Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten und berechnen Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte von G_f. Bestimmen Sie das Verhalten von $f(x)$ für $|x| \rightarrow \infty$ und geben Sie die Gleichung der horizontalen Asymptote von G_f an.

$$f(-x) = e^{-2\cdot x}\cdot\left(x^2 + 2\cdot x + 1\right)$$

$$-f(-x) = -e^{-2\cdot x}\cdot\left(x^2 + 2\cdot x + 1\right)$$

ungleich $\quad f(x) = e^{2\cdot x}\cdot\left(x^2 - 2\cdot x + 1\right)$

$\Rightarrow$ keine Symmetrie im Koordinatensystem

Nullstelle: $\quad f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2\cdot x + 1 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad NS(1, 0)$

Schnittpunkt mit y-Achse: $\quad f(0) \rightarrow 1 \quad \Rightarrow \quad S_y(0, 1)$

$$\lim_{x\rightarrow -\infty}\left[\overset{\infty}{\overset{\uparrow}{\left(x^2 - 2\cdot x + 1\right)}}\cdot\overset{0}{\overset{\uparrow}{e^{2\cdot x}}}\right] = \lim_{x\rightarrow -\infty}\frac{\overset{\infty}{\overset{\uparrow}{x^2 - 2\cdot x + 1}}}{\underset{\infty}{\underset{\downarrow}{e^{-2\cdot x}}}} \overset{\text{l'Hosp.}}{=} \lim_{x\rightarrow -\infty}\frac{2\cdot x - 2}{e^{-2\cdot x}\cdot(-2)}$$

$$\ldots = \lim_{x\rightarrow -\infty}\frac{\overset{\infty}{\overset{\uparrow}{1 - x}}}{\underset{\infty}{\underset{\downarrow}{e^{-2\cdot x}}}} \overset{\text{l'Hosp.}}{=} \lim_{x\rightarrow -\infty}\frac{-1}{e^{-2\cdot x}\cdot(-1)} = \lim_{x\rightarrow -\infty}\frac{1}{\underset{\infty}{\underset{\downarrow}{e^{-2\cdot x}}}} \rightarrow 0^+$$

$\Rightarrow$ Horizontale Asymptote: $y = 0$

$$\lim_{x\rightarrow \infty}\left[\overset{\infty}{\overset{\uparrow}{\left(x^2 - 2\cdot x + 1\right)}}\cdot\overset{\infty}{\overset{\uparrow}{e^{2\cdot x}}}\right] \rightarrow \infty$$

Teilaufgabe 1.2 (8 BE)
Ermitteln Sie die maximalen Intervalle, in denen die Funktion f echt monoton zunehmend bzw. echt monoton abnehmend ist, und bestimmen Sie die Art und die Koordinaten der Extremalpunkte von G_f.

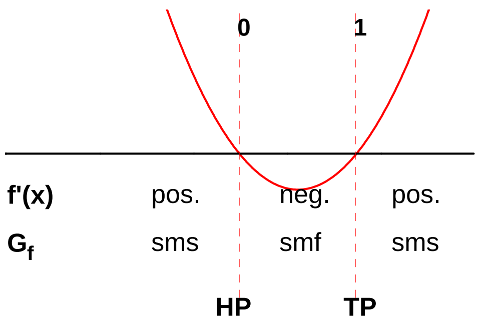
(Zur Kontrolle: $f'(x) := 2 \cdot \left(x^2 - x\right) \cdot e^{2 \cdot x}$)

Ableitung berechnen:

$$f'(x) = (2 \cdot x - 2) \cdot e^{2 \cdot x} + \left(x^2 - 2 \cdot x + 1\right) \cdot e^{2 \cdot x} \cdot 2 = e^{2 \cdot x} \cdot \left(2 \cdot x - 2 + 2 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 2\right)$$

$$\ldots = e^{2 \cdot x} \cdot \left(2 \cdot x^2 - 2 \cdot x\right)$$

Nullstellen von **f'(x)**: $2 \cdot x^2 - 2 \cdot x = 0$ **auflösen, x** $\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad e^{2 \cdot x} > 0$ für alle x

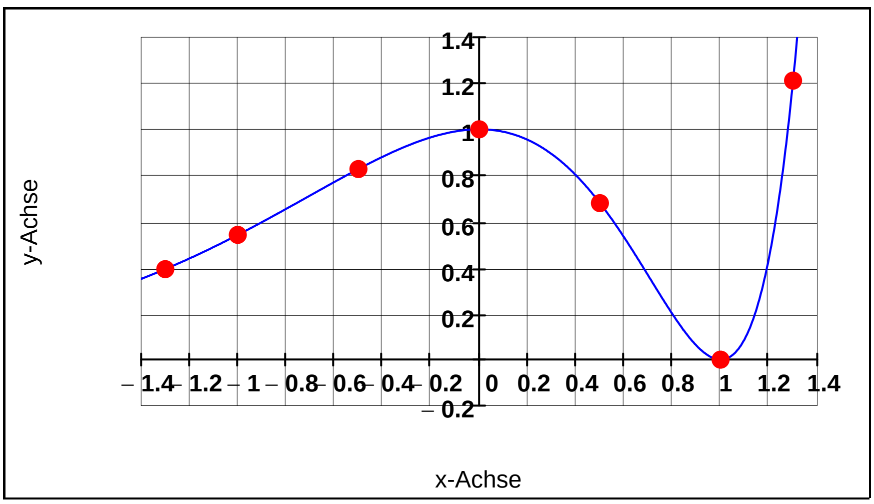


$f(0) = 1 \qquad$ **HP(0, 1)**

$f(1) = 0 \qquad$ **TP(1, 0)**

Teilaufgabe 1.3 (5 BE)
Zeichnen Sie G_f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und der Berechnung weiterer geeigneter Funktionswerte für $x \in [-1.3;\ 1.3]$ in ein kartesisches Koordinatensystem.
Maßstab auf beiden Achsen: $1 \cdot LE = 5 \cdot cm$

$$\text{Werte} = \begin{pmatrix} \text{"x"} & -1.3 & -1 & -0.5 & 0.5 & 1.3 \\ \text{"f(x)"} & 0.39 & 0.54 & 0.83 & 0.68 & 1.21 \end{pmatrix}$$



Teilaufgabe 1.4 (9 BE)

Gegeben ist die Funktion **F** mit $F(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(x^2 + b\cdot x + c\right)e^{2\cdot x}$, $b, c \in IR$, $D_F = D_f$.

Bestimmen Sie **b** und **c** so, dass **F** eine Stammfunktion von **f** ist. Kennzeichnen Sie die Fläche, die G_f mit den Koordinatenachsen im ersten Quadranten einschließt und berechnen Sie die exakte Maßzahl des Flächeninhalts.
(Teilergebnis: $b = -3$; $c = 2.5$)

$$F'(x) = \frac{1}{2}\cdot\left[(2x + b)\cdot e^{2\cdot x} + \left(x^2 + b\cdot x + c\right)\cdot e^{2\cdot x}\cdot 2\right] = \left[\left(x + \frac{1}{2}\cdot b\right) + x^2 + b\cdot x + c\right]\cdot e^{2\cdot x}$$

$$F'(x) = \left[x^2 + (1 + b)\cdot x + \left(\frac{1}{2}\cdot b + c\right)\right]\cdot e^{2\cdot x}$$

Koeffizientenvergleich:

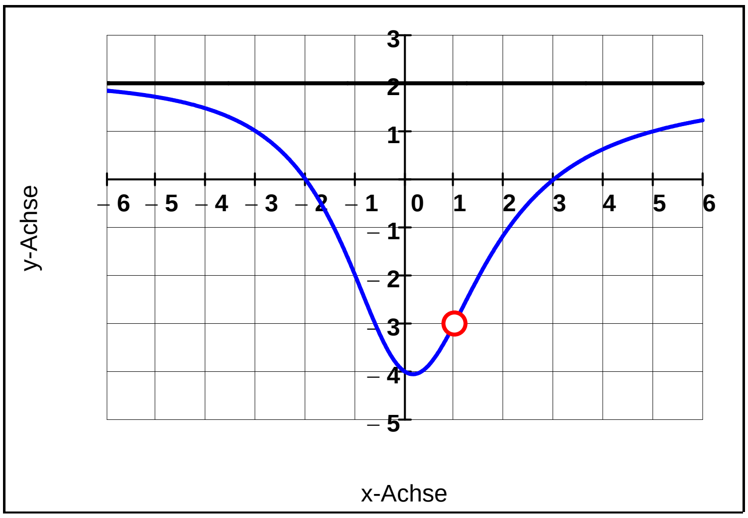
$1 + b = -2$ **auflösen** $, b \ \rightarrow -3$ $\qquad b := -3$

$\frac{1}{2}\cdot b + c = 1$ **auflösen** $, c \ \rightarrow \frac{5}{2}$

Konkrete Stammfunktion: $F(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(x^2 - 3\cdot x + \frac{5}{2}\right)\cdot e^{2\cdot x}$

Fläche: $A = \int_0^1 f(x)\,dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{2}\cdot\left(1 - 3 + \frac{5}{2}\right)\cdot e^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot e^0 = \frac{1}{4}\cdot e^2 - \frac{5}{4}$

Teilaufgabe 2.0
Die untenstehende Abbildung zeigt den Graphen einer gebrochen-rationalen Funktion **g** mit seiner Asymptote. Der Graph besitzt bei **(1/ –3)** ein "Loch" und keine weiteren Definitionslücken. Alle Schnittstellen mit den Koordinatenachsen sind ganzzahlig.



Teilaufgabe 2.1 (5 BE)
Begründen Sie genau, zu welchem der nachfolgenden Funktionsterme der abgebildete Graph gehört.

$$g_1(x) = \frac{2\cdot(x+2)\cdot(x-3)\cdot(x-1)}{(x-1)} \qquad g_2(x) = \frac{2\cdot(x+2)\cdot(x-3)\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot\left(x^2-1\right)}$$

$$g_3(x) = \frac{(x+2)\cdot(x-3)\cdot(x-1)}{0.5\cdot(x-1)^2\cdot(x+1)} \qquad g_4(x) = \frac{2\cdot(x+2)\cdot(x-3)\cdot(x-1)}{\left(x^2+3\right)\cdot(x-1)}$$

$$g_5(x) = \frac{2\cdot(x+2)\cdot(x-3)\cdot(x-1)}{\left(x^2+2\right)\cdot(x-1)}$$

Nullstellen (-2/0) und (3/0) und x=1 einzige hebbare Def.lücke, also g_4 oder g_5.

$$g_4(x) := \frac{2\cdot(x+2)\cdot(x-3)\cdot(x-1)}{\left(x^2+3\right)\cdot(x-1)} \qquad g_4(0) = -4$$

g_4 ist der richtige Term

$$g_5(x) := \frac{2\cdot(x+2)\cdot(x-3)\cdot(x-1)}{\left(x^2+2\right)\cdot(x-1)} \qquad g_5(0) = -6$$

Teilaufgabe 2.2 (5 BE)
Gegeben ist nun die Funktion **h** mit $h(x) = \ln(g(x))$ in der maximalen Definitionsmenge $D_h \subset \mathbb{R}$, wobei der zu **g** gehörige Graph in 2.0 dargestellt ist. Geben Sie D_h, die Nullstellen von h und das Verhalten von $h(x)$ im Unendlichen an.

Definitionsmenge: $g_4(x) > 0 \qquad D_h = \,]-\infty\,;-2[\,\cup\,]\,3\,;\infty[$

$h(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad g_4(x) = 1$ aus der Zeichnung: $x_1 = -3$ und $x_2 = 5$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) \to \ln(2) \qquad \lim_{x\to\infty} h(x) \to \ln(2)$$

Teilaufgabe 3.0
Die Herstellungskosten $k(x)$ (in Euro) pro Gerät einse bestimmten Plasma-Fernsehgeräts in Abhängigkeit von der Stückzahl x können durch die reelle Näherungsfunktion mit dem Funktionsterm $k(x) := \frac{1100 \cdot x + 120000}{2 \cdot x + 3}$ für $x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 50$ beschrieben werden.

Teilaufgabe 3.1 (5 BE)
Berechnen Sie die Herstellungskosten pro Fernsehgerät bei **100** bzw. **1000** produzierten Fernsehgeräten, und die Stückzahl, ab der die Herstellungskosten pro Gerät unter **600 €** liegen.

$k(100) = 1133 \qquad\qquad k(1000) = 609$

$$k(x) < 600 \rightarrow \frac{1100 \cdot x + 120000}{2 \cdot x + 3} < 600 \text{ auflösen}, x \rightarrow 1182 < x \vee x < -\frac{3}{2}$$

Ab 1182 Geräten sind die Herstellungskosten kleiner als 600 € pro Gerät.

Teilaufgabe 3.2 (4 BE)
Zeigen Sie, dass sich die Herstellungskosten eines Geräts mit wachsender Stückzahl immer mehr verringern.
(Zur Kontrolle: $k'(x) := \frac{-236700}{(2 \cdot x + 3)^2}$)

$$k'(x) = \frac{(2 \cdot x + 3) \cdot 1100 - (1100 \cdot x + 120000) \cdot 2}{(2 \cdot x + 3)^2} = \frac{3300 - 240000}{(2 \cdot x + 3)^2} = \frac{-236700}{(2 \cdot x + 3)^2}$$

$k'(x) < 0$ für alle x $\Rightarrow$ Graph von k ist streng monoton abnehmend

Teilaufgabe 3.3 (4 BE)
Ermitteln Sie $k'(100)$ und $k'(1000)$ und interpretieren Sie die Ergebnisse im Sachzusammenhang.

$k'(100) = -5.74 \qquad\qquad k'(1000) = -0.059$

Bei der Herstellung von einem Gerät mehr vermindern sich die Herstellungskosten je Gerät bei 100 Geräten um 5,74 €, bei 1000 Geräten um 0,059 €.

Teilaufgabe 3.4 (2 BE)
Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to \infty} k(x)$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1100 \cdot x + 120000}{2 \cdot x + 3} = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x \cdot \left(1100 + \frac{120000}{x}\right)}{x \cdot \left(2 + \frac{3}{x}\right)} \right] = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{\left(1100 + \frac{120000}{x}\right)}{\left(2 + \frac{3}{x}\right)} \right] = 550$$

Die Herstellungskosten nähern sich für sehr große Stückzahlen dem Wert 550 €.

Teilaufgabe 3.5 **(5 BE)**

Zeichnen Sie den Graphen $\mathbf{G_k}$ von **k** und seine Asymptote für $\mathbf{x} \in \mathbf{[\,50\,;\,1200\,]}$ unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem.