Die Formel von Cardano - Herleitung

Theorie 1: Allgemeine Herleitung der reduzierten Form

Gegeben ist eine kubische Gleichung $A \cdot y^3 + B \cdot y^2 + C \cdot y + D = 0$
mit $A \neq 0 \wedge A, B, C, D \in IR$.

Diese Gleichung wird in die ***reduzierte Form*** $x^3 + p \cdot x + q = 0$ gebracht.

1. Schritt: Normierung

$A \cdot y^3 + B \cdot y^2 + C \cdot y + D = 0$ durch A dividieren und neue Koeffizienten wählen:

$$y^3 + b \cdot y^2 + c \cdot y + d = 0$$

2. Schritt: Substitution: $y = x - \frac{b}{3}$

$$\left(x - \frac{b}{3}\right)^3 + b \cdot \left(x - \frac{b}{3}\right)^2 + c \cdot \left(x - \frac{b}{3}\right) + d = 0$$

vereinfachen:

$$y^3 + b \cdot y^2 + c \cdot y + d = 0 \rightarrow \frac{2 \cdot b^3}{27} - \frac{b^2 \cdot x}{3} - \frac{c \cdot b}{3} + x^3 + c \cdot x + d = 0$$

Zusammenfassen
:

$$x^3 + \left(c - \frac{b^2}{3}\right) \cdot x + \left(\frac{2 \cdot b^3}{27} - \frac{c \cdot b}{3} + d\right) = 0$$

3. Schritt: Reduzierte Form

Koeffizientenvergleich: $p(b, c, d) := c - \frac{b^2}{3}$ $\qquad$ $q(b, c, d) := \frac{2 \cdot b^3}{27} - \frac{c \cdot b}{3} + d$

liefert: $x^3 + p \cdot x + q = 0$

Beispiel:

Gegeben ist die kubische Gleichung: $2\cdot y^3 + 12\cdot y^2 - 120\cdot y - 832 = 0$

Koeffizienten ablesen: $A := 2$ $B := 12$ $C := -120$ $D := -832$

Normierung: $y^3 + 6\cdot y^2 - 60\cdot y - 416 = 0$

Koeffizienten ablesen: $b := 6$ $c := -60$ $d := -416$

$$y^3 + b\cdot y^2 + c\cdot y + d = 0 \rightarrow y^3 + 6\cdot y^2 - 60\cdot y - 416 = 0$$

Reduzierte Form: $p := c - \frac{b^2}{3}$ $q := \frac{2\cdot b^3}{27} - \frac{c\cdot b}{3} + d$

$$x^3 + p\cdot x + q = 0 \rightarrow x^3 - 72\cdot x - 280 = 0$$

Theorie 2: Herleitung der Formel von Cardano

Gegeben ist eine kubische Gleichung in reduzierter Form: $x^3 + p\cdot x + q = 0$
mit $p, q \neq 0 \wedge p, q \in IR$.

Dann gilt für **eine** Lösung: $x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$

Die Lösung der reduzierten Form einer kubischen Gleichung geht größtenteils auf ***Gerolamo Cardano*** (24.9.1501 - 20.9.1576) zurück.
Die Idee war, eine *kubische Gleichung* auf eine *quadratische Gleichung* zurückzuführen.

http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/PictDisplay/Cardan.html

Setze $x = u + v$ (1) mit $u \neq 0 \wedge v \neq 0 \wedge u \neq -v$

Binom ausmultiplizieren und teilweise faktorisieren:

$$x^3 = (u+v)^3 = u^3 + 3\cdot u^2\cdot v + 3\cdot u\cdot v^2 + v^3 = u^3 + 3\cdot u\cdot v\cdot(u+v) + v^3 \qquad (2)$$

alles auf eine Seite:

$$(u+v)^3 - 3\cdot u\cdot v\cdot(u+v) - u^3 - v^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 3\cdot u\cdot v\cdot x - u^3 - v^3 = 0$$

Koeffizientenvergleich: $-p = 3\cdot u\cdot v$ (3)

$-q = u^3 + v^3$ (4)

Aus (3) $v = -\dfrac{p}{3\cdot u}$

In (4) $-q = u^3 + \left(-\dfrac{p}{3\cdot u}\right)^3 \quad \Leftrightarrow \quad u^3 - \left(\dfrac{p}{3}\right)^3\cdot\dfrac{1}{u^3} + q = 0$

Multiplizieren mit $u^3 \neq 0$: $u^6 + q\cdot u^3 - \left(\dfrac{p}{3}\right)^3 = 0$

Mit der Substitution $u^3 = z$ entsteht eine **quadratische Gleichung**:

$$z^2 + q\cdot z - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0 \text{ auflösen}, z \rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{\dfrac{4\cdot p^3}{27} + q^2}}{2} - \dfrac{q}{2} \\ -\dfrac{q}{2} - \dfrac{\sqrt{\dfrac{4\cdot p^3}{27} + q^2}}{2} \end{pmatrix}$$

Umformung: $z_1 = -\dfrac{q}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{p}{3}\right)^3 + \left(\dfrac{q}{2}\right)^2}$ $\qquad z_2 = -\dfrac{q}{2} - \sqrt{\left(\dfrac{p}{3}\right)^3 + \left(\dfrac{q}{2}\right)^2}$

Resubstitution:

$$u_1^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} \qquad u_2^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}$$

Mit $v^3 = -q - u^3$ folgt:

$$v_1^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} \qquad v_2^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}$$

Es war: $x = u + v$

Damit folgt für eine Lösung (die andere ist identisch):

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

Definition der Diskriminante: $D := \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$$

Mit den Abkürzungen K_1 und K_2 lautet die Formel von Cardano:

$$K_1 := -\frac{q}{2} + \sqrt{D} \qquad K_2 := -\frac{q}{2} - \sqrt{D} \qquad x_1 := \sqrt[3]{K_1} + \sqrt[3]{K_2}$$

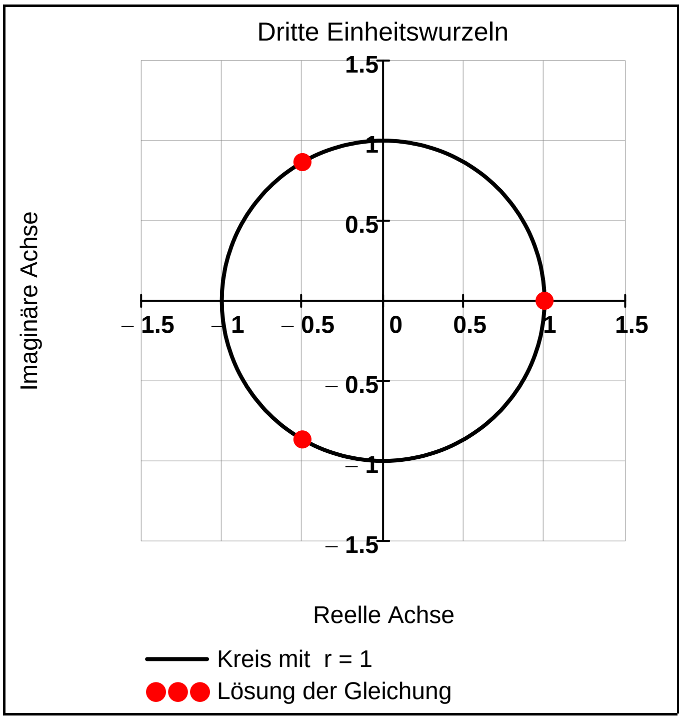
Jede Gleichung dritten Grades hat im Komplexen drei Lösungen. Die Formel von Cardano liefert nur eine Lösung der gegebenen Gleichung dritten Grades. Die fehlenden Lösungen werden mit Hilfe der ***dritten Einheitswurzeln*** berechnet.

$$z0 := z^3 = 1 \text{ auflösen}, z \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\cdot i}{2} \\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\cdot i}{2} \end{pmatrix}$$

$e_1 := z0_1$ $e_2 := z0_2$ $e_3 := z0_3$

$e_1 = 1$ $e_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot i}{2}$ $e_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3} \cdot i}{2}$

$\varphi := 0, \frac{\pi}{100} .. 2 \cdot \pi$



Die beiden komplexen Wurzeln müssen so gewählt werden, dass die Nebenbedingung

$u \cdot v = -\frac{p}{3}$ erfüllt ist

Für die Lösungen (Linearkombinationen) der gegebenen Gleichungen gilt:

$x_1 := \sqrt[3]{K_1} + \sqrt[3]{K_2}$

$x_2 := e_2 \cdot \sqrt[3]{K_1} + e_3 \cdot \sqrt[3]{K_2}$

$x_3 := e_3 \cdot \sqrt[3]{K_1} + e_2 \cdot \sqrt[3]{K_2}$

Eingesetzt:

$$x_1 := \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$$

$$x_2 := \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot i}{2}\right) \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3} \cdot i}{2}\right)$$

$$x_3 := \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3} \cdot i}{2}\right) \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot i}{2}\right)$$

Beispiel

Gegeben ist die Gleichung $x^3 - 72 \cdot x - 280 = 0$

a) Lösen Sie die Gleichung mithilfe der Formel von Cardano.

b) Überprüfen Sie die Richtigkeit der Lösungen mit Mathcad .

Teilaufgabe a)

$p := -72$ $\qquad q := -280$ $\qquad D := \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$

Lösungen nach Cardano:

$$x_1 := \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} \qquad x_1 = 10$$

$$x_2 := \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot i}{2}\right) \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3} \cdot i}{2}\right) \qquad x_2 = -5 + \sqrt{3} \cdot i$$

$$x_3 := \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3} \cdot i}{2}\right) \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot i}{2}\right) \qquad x_3 = -5 - \sqrt{3} \cdot i$$

Teilaufgabe b)

$$x^3 - 72 \cdot x - 280 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 10 \\ -5 + \sqrt{3} \cdot i \\ -5 - \sqrt{3} \cdot i \end{pmatrix}$$